CÁLCULO INFINITESIMAL

Introducción

El **cálculo infinitesimal** es una herramienta matemática de extraordinaria utilidad en el planteo y resolución de problemas que admitan un modelo en los que el sistema que se estudia sea divisible en pequeñas partes simples o **diferenciales**, que sumadas (integradas) vuelven a dar el total. La mayoría de los problemas matemáticos, geométricos y físicos admiten este enfoque, y por lo tanto tienen en el cálculo infinitesimal importante aliado.

El cálculo infinitesimal se divide en dos ramas complementarias: **cálculo diferencial** y **cálculo integral**, que se ocupan respectivamente del cálculo de la partición o **diferenciación**, y el de la suma o **integración**.

Tiene remotos orígenes en los filósofos y matemáticos de la escuela griega, entre ellos el célebre Arquímedes de Siracusa. Ellos fueron los primeros en imaginar un cuerpo dividido en elementos más simples en forma y tamaño. En 1635, el jesuita boloñés Bonaventura Cavalieri describió en su Geometria Indivisibilibus Continuorum, las bases del cálculo integral de áreas y volúmenes de elementos geométricos, imaginando la abstracción de una suma infinita de pequeñísimas partes "indivisibles" por lo simples. El principio de Cavalieri, que se estudia en geometría del espacio, reza que dos cuerpos que tienen iguales secciones para alturas iguales, poseen el mismo volumen. Otro hito en el cálculo se debe al físico Galileo Galilei (1564-1642) que calculó el espacio en base a la aceleración con la fórmula $e = ½\, a.t^2$, verdadera integración del concepto diferencial de velocidad instantánes $de/dt=a.t$. En 1655 el inglés John Wallis presentó otra importante aproximación al problema de el cálculo de áreas en su Arithmetica Infinitorum. Luego vinieron Descartes, Fermat y Barrow, que hicieron considerables aportes al calculo infinitesimal a través de la geometría.

Pero el verdadero impulso lo recibió el "calculus" de dos grandes: El físico inglés Isaac Newton (1642-1727), que lo desarrolló completamente y lo aplicó la mecánica, en su célebre obra "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" y el filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz, (1646 -1716) quién elaboró al mismo tiempo e independientemente de Newton un algoritmo similar, más riguroso matemáticamente hablando, aunque quizás menos intuitivo. Complementarias en vez de rivales o contrapuestas, principios y notaciones de Newton y Leibniz se siguen usando actualmente hermanadas en el planteo y resolución de problemas, desvaneciendo así la inicial rivalidad que la historia adjudica a sus creadores.

El cálculus, herramienta omnipresente

Sin saberlo, a diario aplicamos conceptos de cálculo infinitesimal.

- Al estudiar evolución de precios o cotizaciones. Nos fijamos la tasa de crecimiento o disminución de las mismas. Estamos aplicando el concepto de variable y de derivada.
- Cuando miramos el velocímetro de nuestro auto, tomamos nota de un cociente incremental entre espacio y un intervalo muy pequeño de tiempo. Y si anotamos la diferencia entre dos lecturas del odómetro, estamos integrando la velocidad en el tiempo.
- Cuando trazamos la tangente a una curva, estamos aplicando el concepto de límite geométrico ente dos puntos sucesivos de la misma.
- Los médicos que observan la evolución de la temperatura de un paciente evalúan una función con máximos, mínimos y tasas de crecimiento, parámetros todos ellos objetos del cálculo infinitesimal.
- Al cubicar un tanque enterrado de nafta de una estación de servicio, sus dueños hacen un análisis diferencial-integral de áreas y volúmenes.
- Al aplicar la "regla de tres" o las ley de las proporciones, los alumnos de primaria están sin saberlo aplicando el concepto de diferencial, al linealizar o proporcionalizar una ley de variación en un intervalo pequeño.

Variables y constantes - Dependencia funcional - Concepto de función.

Son objetos del cálculo **cantidades o magnitudes** que varían o permanecen constantes. Se llaman genéricamente **variables**. Precios y cantidades son variables económicas. Longitudes y pesos son variables físicas. Tasas de mortalidad y natalidad son variables demográficas. Cantidades de individuos afectados por el mal de Chagas son variables sanitarias, etc.

La variación o la constancia de esas cantidades o magnitudes puede darse en el tiempo, en el espacio, o en general tomando como referencia otra variable (llamada independiente) relacionada con la primera (variable dependiente).

La calificación de dependencia o independencia de una variable es en general subjetiva, según cómo consideremos la relación causa-efecto entre ambas. Podemos suponer que los precios de los pasajes varían con la estación del año, y decimos que la variable independiente es el tiempo, porque regula a los precios, que son dependientes de la época. Hay otros casos en que la cosa es discutible: Por ejemplo del estudio entre temperatura y volumen de una masa fija de gas surge una ley de proporcionalidad: a mayor temperatura, mayor volumen. ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente?. Depende de cómo imaginemos el proceso experimental: la variable independiente será la que esté gobernada por nosotros a voluntad. Puede ser la temperatura, si actuamos sobre el mechero, o el volumen si actuamos sobre el pistón que limita el gas encerrado.

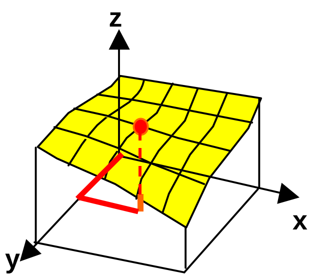
Lo realmente importante es siempre reconocer la **dependencia funcional**: es decir el hecho de que cuando una variable toma un determinado valor, la otra adquiere otro u otros valores relacionados con el primero a través de una **ley o función**.

Tipos de funciones - Continuidad

Una **función** es entonces una **correspondencia** entre **dos o más variables**. Si para cada valor de una de las variables existe un sólo valor de la o las otras, se dice que la función es **uniforme**. Puede ocurrir que a un valor de una de las variables correspondan más de un valor de la o las otras. En tal caso, se dice que la función es **multiforme**.

Para imaginar una función no hay nada mejor que una **gráfica** de la misma. La **gráfica** más corriente es la que representa a una función de dos variables con una **línea** en un **plano** definido por **dos ejes ortogonales** que se cortan en un punto llamado **origen**. Dichos ejes son el eje de **abscisas**, generalmente horizontal y reservado a la variable independiente, por ejemplo **x**, y el eje de **ordenadas**, que se dibuja por lo general en posición vertical y está destinado a la variable dependiente, pongamos **y**. La línea representativa de la función puede estar constituída por una sucesión **densa** de puntos, esto es que entre puntos no hay resquicio para valores intermedios, o también por sucesiones no densas. Por ejemplo una función que esté definida sólo para valores enteros de la variable, dará una sucesión de puntos separados por zonas en la que la función no existe. Los ejes en cambio siempre están constituidos por rectas densas, que contienen todos los valores numéricos posibles: **enteros, racionales, irracionales o inconmensurables** (números con un número infinito de decimales no periódicos) . A **cada punto** de la línea que representa la función **y=f(x)** (se lee y igual a función de x), corresponden sobre los ejes sendos valores de **x** e **y** llamados **coordenadas de la función en el punto considerado**.

Si el número de variables es de **tres** (por ejemplo dos independientes, **x** e **y**, y una tercera dependiente **z=f(x,y)**), la representación de la función es una superficie en el espacio.



En esta obra nos ocuparemos de funciones de dos variables, para cuya representación basta el **plano euclídeo**.

La línea que representa la gráfica de las funciones de dos variables puede tener formas y aspectos diversos. Puede ser una línea recta o una curva, puede presentar cortes o quiebres o bien ser continua. Puede responder a una ecuación o función conocida, como la recta o la parábola, o también puede tratarse de una curva que no tenga una expresión conocida...(lo que no quiere decir que no exista como función)

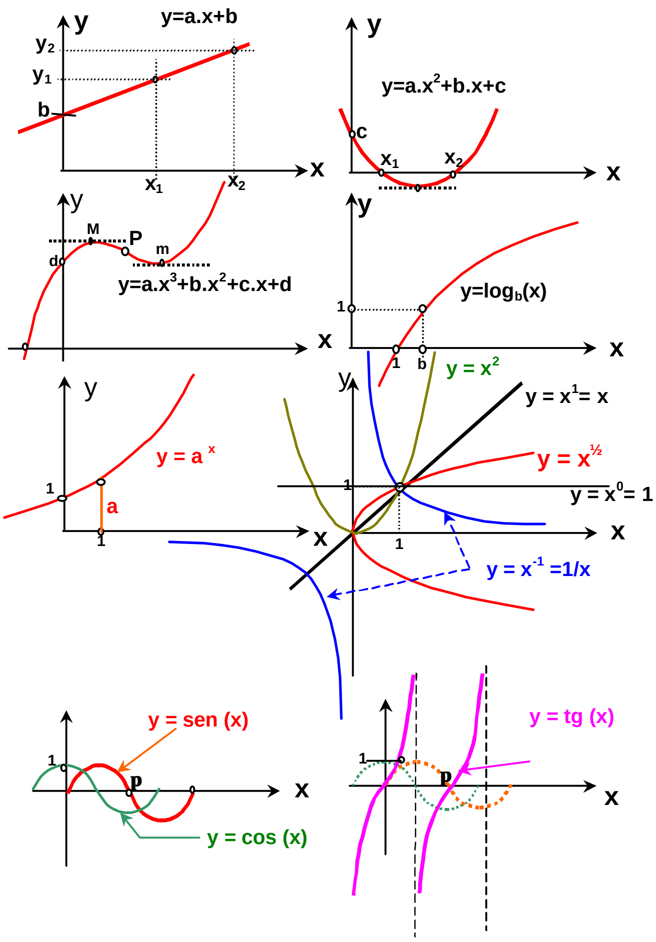
Veamos algunos tipos de funciones representables con ecuaciones conocidas por un estudiante secundario promedio:

Recta o función lineal

La función **y=a.x+b** representada en una gráfica ortogonal es una recta infinita.

Una tabla de valores bien elegida nos da los puntos más importantes: Haciendo **x=0** se obtiene **y=b,** que se llama ordenada al origen. El punto de corte con el eje **x** se halla imponiendo la condición de ordenada nula, es decir haciendo **y=0**, con lo cual es **x=-(b/a)**

De la figura surge que tomando dos puntos cualesquiera, de coordenadas **[x_1,y_1]** y **[x_2,y_2]**, el cociente **(y_2-y_1)/(x_2-x_1)** es constante, ya que numerador y denominador miden los lados de un triángulo que se mantiene semejante cualquiera sea la elección de los puntos sobre la recta. Si el punto **[2]** es genérico, es decir no está individualizado, podremos asignarle también en forma genérica las coordenadas **[x,y]** y por lo tanto también resulta **(y-y_1)/(x-x_1)=k** (constante), y operando algebraicamente tendremos: **y=k.x-k.x_1+y_1**



Comparando la ecuación anterior con la original **y=a.x+b**, se tiene que **k=a**, que se llama coeficiente angular o pendiente de la recta. Así entonces resulta **(y-y_1)/(x-x_1)=a** , que es la ecuación de la recta de pendiente **a**

Como en un camino que sube, la pendiente es positiva. Si el camino (léase la recta) baja, la pendiente será negativa. ¿Y si el camino es horizontal?. Pués sencillamente, se tiene la ecuación de una recta horizontal de altura constante b, es decir **y=b**, ya que **a=0**

La recta es la función más importante del análisis matemático. En cierta medida, entre dos puntos suficientemente próximos, la mayoría de las funciones que dan una representación curva, se pueden considerar equivalentes al segmento de recta que une dichos puntos próximos. Esta "linealización" de las curvas es la base del cálculo diferencial, como veremos dentro de poco.

Parábola de eje vertical

La representación gráfica de un polinomio de segundo grado es una parábola de eje vertical. Su función es **$y=a.x^2+b.x+c$**

Igual que con la recta, busquemos los puntos importantes de su representación gráfica: Haciendo **x=0**, obtenemos **y=c**, que es la ordenada al origen.

Sabemos por nuestros estudios de álgebra que los puntos de corte con el eje x están dados por las dos raíces de la ecuación de segundo grado **$a.x^2+b.x+c=0$** que valen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

A un valor del discriminante **b^2-4ac** mayor, igual o menor que cero corresponden respectivamente dos raíces reales (la parábola corta al eje x en dos puntos), una única raíz (la parábola se apoya sobre el eje x en un punto, en la es tangente), o dos raíces imaginarias conjugadas (la parábola no corta al eje x, porestar por sobre él) . La figura corresponde al primer caso.

La función de segundo grado tiene un máximo o un mínimo, según la parábola tenga el vértice hacia abajo o hacia arriba. El estudio de máximos y mínimos de las funciones está relacionado con la posición de los puntos de tangente horizontal, que se hallan con ayuda del cálculo, como veremos luego.

Polinomio de tercer grado

Esta función se llama también parábola cúbica y tiene como expresión **$y=ax^3+bx^2+cx+d$**. La representación gráfica es una curva con una rama ascendente y otra descendente, simétricas con respecto a un punto **P**, llamado de **inflexión**.

Los puntos de corte con el eje **x** corresponden a las raíces de la ecuación **$ax^3+bx^2+cx+d=0$** que de acuerdo al teorema fundamental del álgebra, coinciden en número con el grado del polinomio, es decir tres en este caso. Una al menos debe ser real (porque hay por lo menos una intersección con el eje **x** , que corresponde a la rama descendente). Las otras dos raíces pueden ser reales o imaginarias. En la figura se ha representado el caso de una sola raíz real y las otras dos imaginarias.

El cálculo algebraico exacto de las raíces de la ecuación cúbica se efectúa reduciéndola a una ecuación sin término cuadrático, mediante un cambio de variables, y aplicando luego la fórmula de **Cardano**. Remitimos al lector estudioso a un tratado de álgebra superior.

La parábola cúbica tiene tres puntos notables que no están en relación con los ejes: son el ya visto punto **P** de inflexión, y a ambos lados de él un máximo **M** y un mínimo **m** , ambos relativos a sólo un intervalo de la curva (no a toda su extensión), puntos en los que la tangente a la curva es horizontal. El cálculo nos permitirá hallarlos con facilidad, como veremos oportunamente.

Función logarítmica

La función logarítmica es **$y=\log_b(x)$** , definiéndose por **$\log_b(x)$** (se lee logaritmo en base **b** de **x**) un exponente **y** tal que **$b^y=x$** . La base más común es **b = 10**, con lo que para **$y=\log_{10}(x)$** es **$10^y=x$**

$\log_{10}(2)$@0,301 significa por lo tanto que **$10^{0,301}$@ 2**

Las tablas de logaritmos se usaron mucho tiempo para abreviar cálculos, ya que aplicando logaritmos a ambos miembros de una ecuación, se transforma multiplicación o división respectivamente en suma o resta, y potenciación en multiplicación. Antes de la aparición de las calculadoras, era más fácil sumar que multiplicar...

Por ejemplo, sea **a = $10^{\log a}$** y **b = $10^{\log b}$** , resulta

a.b =**$10^{\log a}$. $10^{\log b}$ = $10^{(\log a+ \log b)}$**

por lo tanto **log (a.b) = (log a+ log b)**

Haciendo a=305208 y b=60,23 resulta:

log(305208x60,23)=5,4846+1,7798=7,2644

de donde **305208x60,23=$10^{7,2644}$=$10^7.10^{0,2644}$**

Si buscamos en la vieja Tabla de Logaritmos decimales calculada por J. Lalande en 1760, el antilogaritmo de 0,2644, encontramos que corresponde al número 1,839=$10^{0,2644}$.

Así entonces **305208x60,23@1,839.10^7=18390000**

El cálculo exacto da **305208*60,23=18382677,84**

De la expresión **a^b = c**, resulta **a=$c^{1/b}$** y **b=log(c)/log(a)** (expresión válida cualquiera sea la base)

Actualmente el interés de los logaritmos no reside tanto en sus aplicaciones al cálculo numérico, sino a que la función logaritmo aparece naturalmente como resultado de operaciones de diferenciación e integración, como se verá oportunamente. La base de estos logaritmos "naturales" es el número inconmensurable **e=2,71828182845904523536028747135266.......** , que encontraremos a menudo en nuestros cálculos.

Los logaritmos naturales se representan con la notación **$\log_e(x)=\ln(x)$**

La curva representativa de **y=log(x)** corta al eje x en **x=1**, ya que **log(1)=0** en cualquier base. También, la curva tiende a un valor negativo muy elevado cuando **x** se acerca a cero. Para **base=b** es **$\log_b(b)=1$** , puesto que **b^1=b**, es decir que la curva pasa por **y=1** con **x=b**

Función exponencial $y=a^x$

Da una curva de la misma forma que la función logarítmica, con la que está emparentada. En efecto, de **$y=a^x$** (a=constante) resulta **x.log(a)=log(y)**, y teniendo en cuenta que **1/log(a)=K** (constante) es **x=K.log(y)**, que representa una función logarítmica en la que la variable independiente es la **y** , y la dependiente es la **x**

Función potencial $y=x^a$

La función potencial se escribe **$y=x^a$** con **a**=constante. De acuerdo al valor de **a** se tienen diferentes tipos de curvas:

Valor de a	Tipo de curva
a=0	**y=1** (recta horizontal de altura unitaria)
0<a<1	**por ejemplo para a=1/2 es y=Öx** (parábola cuyo eje es el de abscisas x)
a=1	**y=x** (recta que biseca el primer cuadrante)
a>1	**por ejemplo para a=2 es $y=x^2$** (parábola cuyo eje es el de ordenadas y)
a<0	**por ejemplo para a=-1 es $y=x^{-1}$=1/x** (hipérbola equilátera)

Se hace notar que la función **y=Öx** es biforme, ya que a cada valor de **x** corresponde un valor positivo y otro negativo de la raíz. por ejemplo si **x=2** es **y=±1,4142...**

Funciones trigonométricas

Seno y coseno

La gráfica de la función **y=sen(x)** es una curva ondulada periódica que pasa por el origen y va desde **y=-1** a **y=+1** llamada sinusoide. Se repite a intervalos iguales de período **2p**. La función **y=cos(x)** es una sinusoide de igual forma, que está desfasada en **p/2** respecto del seno, o sea que **cos(x)=sen(x+p/2).** Desde el punto de vista geométrico, una sinusoide es la proyección de una hélice cilíndrica sobre un plano paralelo al eje del cilindro director. Las semiondas del seno y del coseno se parecen a arcos de parábola, pero una comparación fina entre ambos tipos de funciones como las que nos permitirá hacer el cálculo, revelará importantes diferencias.

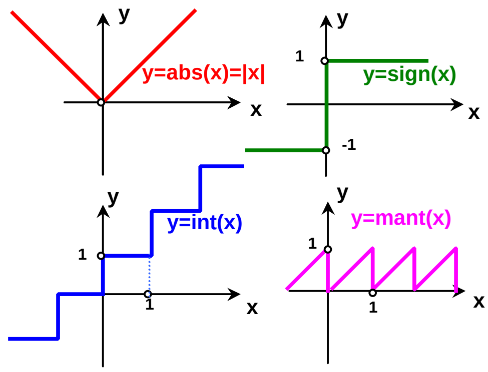
Tangente

Se define **y=tg(x)** como el cociente entre seno y coseno, es decir **y=tg(x)=sen(x)/cos(x)**

La función tangente toma valores que van desde **y= -¥** hasta **y=+¥**, que correponden a valores nulos del denominador (**cos(x)=0**), es decir para **x=p/2**, **3p/2**,.. y en general para **x=(2k+1)p/2**, con **k=0,1,2,3...** Como para esos puntos del eje **x** resulta también que el numerador **sen(x)** cambia de signo, la función tangente toma valores muy grandes positivos (que se acercan a **+¥**) si nos movemos ligeramente hacia la derecha de esos puntos y toma valores negativos enormes (que se acercan a **-¥**) cuando nos movemos un poquito hacia la izquierda. En rigor, no podemos decir cuánto vale la función justo para las abscisas **x=(2k+1)p/2**, salvo que estemos dispuestos a considerar como un punto real al que corresponde a una ordenada infinita. El concepto de **límite matemático**, que abordaremos dentro de poco, nos permitirá definir esta cuestión con todo rigor.

Nuevas funciones

A continuación presentamos en sociedad una serie de funciones que pueden llegar a ser una novedad para nuestros queridos estudiantes secundarios. Pero a poco que las conozcan, se familiarizarán con ellas y de seguro les serán muy útiles, sobre todo si se dedican a la programación .



La función "valor absoluto"

Todos sabemos que se define como valor absoluto de un número a dicho número considerado siempre con signo positivo. Pués bien, **y = abs (x) = |x|** significa que la ordenada de la función es igual al valor absoluto de la variable **x**. Para valores negativos de **x** es **y=-x** (semirrecta con pendiente negativa (de -45º) que viene de lejos y muere en el origen). Para valores positivos de **x** es **y=x**, o sea una semirrecta de pendiente positiva **+45º** que arranca del origen y sube y sube...

¿Qué valor corresponde a **abs(0)**? No cabe duda que el valor absoluto de cero es cero, o sea que nuestra función **abs(x)** se quiebra en el origen, pero sin romperse (sin alusión a algún partido político)

Función "signo"

Se define como función signo a la que toma un valor **-1** constante para todos los valores negativos de la variable independiente, y valor **+1** para todos los valores positivos de la misma. La forma de **y=sign(x)** es un escalón de altura **2** en el origen. ¿Cuál será el valor de **sign(0)**?. Aunque sea discutible, definiremos por ahora que **sign(0)=1**. La función **y=sign(x)** presenta una discontinuidad o salto en el origen.

Este tipo de funciones discontinuas representan o modelizan muchos fenómenos físicos y económicos. Por ejemplo son funciones de este tipo algunas señales eléctricas, como las ondas cuadradas o triangulares generadas por circuitos lógicos de relajación de computadores y televisores. También son ejemplo de funciones escalonadas los cuadros tarifarios de transporte en función de la distancia o las tarifas postales en función del peso de las cartas, que pegan un salto de valor cuando superan determinada distancia (cambio de sección) o peso.

Función “escalón unitario”

Otra función no representada en las figuras anteriores es el escalón unitario, que se simboliza con **y=H(x)** . La **H** se refiere a Oliver Heaviside, el ingeniero electrónico que la inventó. Queda definida **y=H(x)** como **y=0** para **x£0** e **y=1** para **x>0** . Su gráfica es un escalón de una unidad de altura en el origen.

Del estudio de la función escalón y en general de las funciones con **saltos**, se derivan a través del cálculo infinitesimal importantes entes matemáticos llamados **distribuciones y funciones impulsivas,** que vienen a enriquecer y generalizar el concepto de **función**. Veremos luego algo de esto.

La función “valor entero”

Se llama valor entero o íntegro de un número a su parte entera, es decir prescindiendo de su parte decimal. Por ejemplo **int(e)=2**, **int(Ö2)=1 , int(p)=3**

La función **y=int(x)** está representada pués por una escalera con peldaños de altura unitaria, según se ve en la figura. Es típicamente discontinua. Acercándonos a **x=2** por la izquierda, es decir desde valores inferiores a **2**, la función permanece constante en **y=1** hasta **x=1,999...,** pero cuando llegamos a **x=2** , la función salta de golpe desde **y=1** hasta **y=2**, hasta **x=2,999...**. Y se repiten los saltos unitarios de **y** a intervalos también unitarios de **x**.

Función “mantisa” o “valor decimal”

Mantisa quiere decir “añadidura” en latín. Hablando de números, es lo que viene después de la coma.

Por ejemplo **y = mant(p) = 0,1415927....**, y también **y=mant(1 ½) = 0,5**

La gráfica de **y=mant(x)** se denomina “en diente de sierra”, porque recuerda a la hoja de un serrucho. Está constituída por segmentos rectos de pendiente unitaria con escalones unitarios descendentes que coinciden con los valore enteros de **x**

Resulta evidente, de acuerdo a lo dicho, que la suma de las funciones “valor entero” y “mantisa” dan la propia variable, es decir:

y=int(x)+mant(x)=x, que como se sabe está representada por una recta a 45º que pasa por el origen.

La función “módulo”

Se define **y = mod (u,v)** como el **resto** de la división **u/v**. Así se tiene, por ejemplo:

mod (4,3) =1

mod (24,3) = 0,

mod (3, -2)=-1

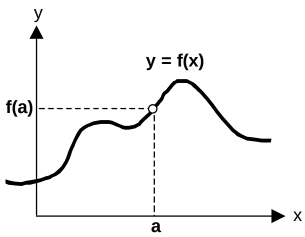
Como es una función de dos variables independientes (**v** y **u**), la función módulo no puede representarse en el plano, y si, en cambio en un espacio de tres dimensiones. Se usa mucho en programación matemática.

Función de función

Muchas veces es cómodo representar una función más o menos complicada como combinación de funciones más simples. Por ejemplo: **y=sen(x^2)** puede ponerse como **y=sen(u)**, con **u=x^2**. Se dice que **y** es una función (**sen**) de función (**u**) de **x**

Se puede escribir entonces **y = f [u(x)]**

Límite de una función



En la figura se ve la gráfica de una función, donde se ha señalado el valor que la función toma para un determinado valor de la variable. Está claro que en correspondencia con un valor próximo a **x=a**, la función se acerca a **f(a)**. Ahora bien, supongamos que justo en **x=a** la función no esté definida. Un ejemplo nos lo aclarará.

Sea la función **y=(x^2-4)/(x-2)**. ¿Qué valor toma **y=f(x)** para **x=2**? Reemplacemos para ello en la expresión de la función la variable **x** por el valor **2**. Nos queda así **y(2) = (4-4)/(2-2) = 0/0**. Evidentemente no podemos calcular el valor de **y(2)** con este método. Por ahora diremos que **y(x)=(x^2-4)/(x-2)** no está definida para **x=2**.

Por supuesto que se puede operar con la función, descomponiendo la diferencia de cuadrados del numerador y simplificando algebraicamente, esto es haciendo:

y = (x^2-4)/(x-2) = (x-2)(x+2)/(x-2) = x+2 , representada por una recta de pendiente unitaria y ordenada al origen igual a dos. Reemplazando **x** por el valor **2** resulta **y(2)=4**, salvando así la indefinición.

Hay casos en que el asunto no es tan sencillo, por ejemplo cuando se quiere calcular la función **y=sen(x)/x** cuando **x=0**. El resultado de tratar de calcular **y(0)** da también en este caso **0/0**, pero la ahora simplificación algebraica no es posible, ya que no sabemos simplificar **sen(x)/x** (¿o si?).

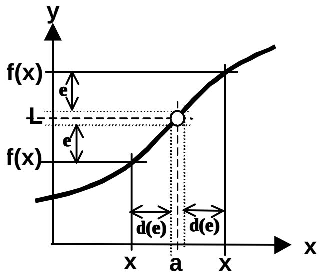
Para estos casos el análisis matemático introduce el concepto de **límite de una función**, a saber:

Se dice que la función **f(x)** se aproxima infinitamente al valor **L**, o converge o tiende hacia **L**, o tiene el límite **L** al tender **x** hacia **a**, cuando la diferencia **f(x)-L** se puede hacer arbitrariamente pequeña con tal de tomar valores de **x** suficientemente próximos a **a**, ya sea mayores o menores, pero sin llegar a dicho valor.

Se usa normalmente para indicar un límite la notación:

lim f(x)=L para x®a

Los matemáticos expresan rigurosamente la condición intuitiva de “arbitrariamente pequeña”, exigiendo que exista un número positivo **e** mayor (nunca igual) que **f(x)-L** , que defina una función **d(e)** mayor (nunca igual) que **x-a** , es decir que haya una correspondencia entre la diferencia entre la función y el límite con la diferencia entre la variable **x** y el valor **a**. Nótese que en la definición de límite se prescinde de la posibilidad de la igualdad entre **f(x)** y **L** , y la de **x** con **a**. De tal manera el límite **L** puede existir independientemente de que la función **f(x)** esté o no definida en **a**



Infintésimos

La importancia de las funciones que toman como límite cero para determinado valor de la variable merece que se las llame de manera distintiva con el nombre de "**infinitésimos**" . Por ejemplo **sex(x)** es un infinitésimo para **x®0**, lo mismo que **y=x**, ya que

lim sen(x)=0 para x®0

lim (x) = 0 para x®0

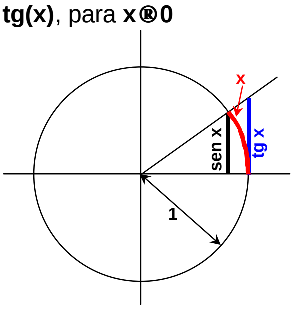
Comparación entre infinitésimos. Orden de infinitud

Hay infinitésimos más "infintamente pequeños" que otros. También los hay menos o igualmente pequeños entre sí.

Por ejemplo las funciones **$f_1=x^2$** y **$f_2=x$**, son ambas infinitésimos para **x®0** . Estudiemos el cociente **f_1/f_2** cerca del cero, para lo cual calculemos **lim(f_1/f_2) x®0.** Simplificando las expresiones se llega a que **lim $_{x®0}$ [x^2/x] = lim $_{x®0}$ [x] = 0**. De la comparación surge que el infinitésimo numerador **$f_1=x^2$** es más infinitamente pequeño que **$f_2=x$**, o que **x^2** es un infinitésimo de orden superior a **x** (ambos para x→0)

Cuando el cociente de dos infinitésimos es la unidad, se dice que son equivalentes. Cuando el cociente es un número no nulo, se dice que son del mismo orden.

Por ejemplo, son infinitésimos equivalentes **sen(x)**,**x** y **tg(x)**, para **x®0**



Se puede ver en la figura que las tres funciones del arco **x** , el propio arco, su seno y su tangente, tienden a coincidir entre sí cuando **x** es suficientemente pequeño.

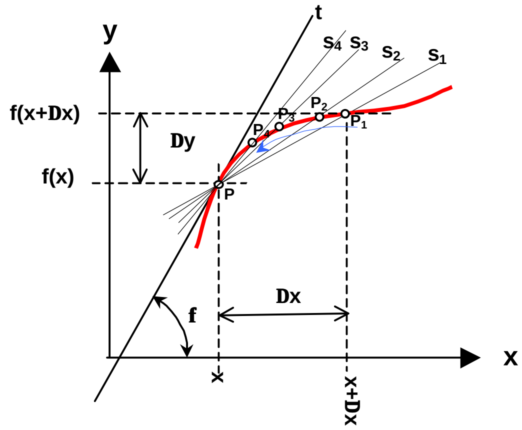
Son infinitésimos del mismo orden para **x®0** las funciones **f_1=3x** y **f_2=2x**, ya que **lim $_{x®0}$ f_1/f_2 = 3/2**

Siendo el límite de una suma igual a la suma de los límites, resulta que la suma de dos infinitésimos del mismo orden da un infinitésimo de igual orden. Por la misma razón la suma de dos infinitésimos de diferente orden, da un infinitésimo equivalente al menor de ellos.

Por ejemplo sea **$f_1=x^2$** y **f_2=2x**, ambos infinitésimos para **x®0**, siendo **2x** el de orden inferior. Resulta entonces que **lim (f_1+f_2)/f_2** para **x®0 = lim $_{x®0}$ (2x+x^2)/2x = lim $_{x®0}$ (2+x)/2 = 1**

Considerando el límite **L** de **f(x)** para **x®a**, es un infinitésimo la diferencia **f(x)-L=0** para **x®a**, o sea que se puede considerar a toda función **f(x)** con límite **L** en un punto como una **suma** de ese **límite** más un **infinitésimo**.

La función derivada



Sea la función continua en el intervalo **x, x+Dx** representada por la figura. Para una abscisa genérica **X** de la misma, la variable dependiente o función toma el valor **y = f(x)**. Si incrementamos el valor de **x** en un valor **Dx**, la función tomará el valor **f(x+Dx)**. De acuerdo a lo visto, el incremento de la variable independiente **Dx** y el correspondiente incremento de la función **Dy=f(x+Dx)-f(x)** son infinitésimos para **Dx®0**

El significado del cociente de ambos incrementos **Dy/Dx** está muy claro en la figura: Es la **pendiente** de la **recta secante S_1** que une el punto **P**, de coordenadas **[x,y]** con el punto **P_1** de coordenadas **[x+Dx , y+Dy]**

Paso al límite

¿Qué pasa cuando hacemos tender a cero al incremento **Dx**?. Corresponde tal cosa a irnos moviendo por la curva desde **P_1** hacia **P**, pasando sucesivamente por **P_1**, **P_2**, **P_3** , **P_4**..., llegando tan cerca como queramos a **P**, o como se decía con razón en el siglo pasado, "hasta llegar a un punto infinitamente próximo a **P**". Las sucesivas secantes **S_1**, **S_2**, **S_3**, que se van determinando con este proceso de acercamiento, llamado **paso al límite**, tienen siempre pendientes numéricamente iguales al correspondiente cociente **Dy/Dx.**

Sin rigor matemático extremo, pero con sentido geométrico intuitivo, se comprende que al unir **P** con un punto infinitamente próximo, la secante **S** se transforma en tangente **t** a la curva en el punto de coordenadas **x,y**.

Así, imaginando la curva como una sucesión de puntos apretados, la tangente geométrica a una curva en un punto es la recta que une dicho punto con el punto que está inmediatamente al lado. No hay puntos intermedios entre ambos. Por lo tanto, la tangente es la recta que tiene dos puntos comunes con la curva, dejando a la misma hacia un solo lado, es decir sin cortarla.

Estas disquisiciones geométricas, se corresponden en el terreno matemático a definir como el límite de **Dy/Dx** para **Dx®0**, al valor de la **pendiente** de la **recta tangente** en el punto **x,y** , que coincide con la tangente trigonométrica del ángulo **f** que forma la recta tangente en el punto considerado, con cualquier paralela al eje **x**

La diferencial

Dicho limite toma un valor para cada punto de la función original **y=f(x)**, definiendo una nueva función que se llama "**derivada**" de la primera, y que se simboliza, según la **notación de Leibniz** como un cociente de incrementos para **Dx®0,** llamados **diferenciales**:

dx se lee "diferencial de x", y significa "un incremento de la variable independiente **x** tan pequeña como se quiera", es decir
dx = lim $_{Dx®0}$Dx

dy se lee "diferencial de y" , y es el incremento de la variable dependiente **y=f(x)** que corresponde al incremento diferencial **dx**, es decir:
dy = lim $_{Dx®0}$Dy, y entonces:
lim $_{Dx®0}$ Dy/Dx = dy/dx = lim $_{Dx®0}$ [f(x+Dx)-f(x)]/ Dx

La notación de Leibniz no es un mero cociente de incrementos entre variables, sino que debe haber entre ellas una relación funcional para que tenga sentido como límite cuando uno de los incrementos tiende a cero.

Otras notaciones usadas, derivadas de las de Newton, son las que usan un operador **D**, o el apóstrofe **'** aplicado a la función original, para significar su derivada:

D f(x) = y' = f'(x) = lim $_{Dx®0}$ Dy/Dx = dy/dx =

= lim $_{Dx®0}$ [f(x+Dx)-f(x)]/ Dx = tg f

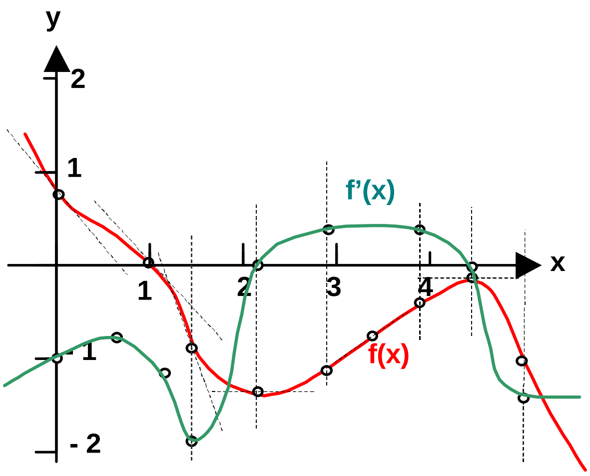
Se usan por igual ambas notaciones. Inclusive, se las usa conjuntamente en una misma expresión, al poner, por ejemplo **dy=y'.dx ,** fórmula que pone de relieve que la diferencial de la función y es igual a su derivada multiplicada por el incremento infinitésimo **dx**

Cuando la variable independiente es el tiempo t, Newton representaba con un punto sobre la variable a la función derivada , a la que llamaba "**fluxión**", esto es flujo. Esto es así, ya que la derivada de una magnitud variable con respecto al tiempo representa la cantidad de la variable que pasa en la unidad de tiempo, o sea el flujo de la variable.

Así el fluxión del espacio (función del tiempo t) **e=f(t)** coincide con el concepto de velocidad instantánea **v**, cociente entre espacio recorrido por un móvil en un intervalo de tiempo , cuando el intervalo tiende a cero, o sea **v = lim$_{Dt®0}$ De/Dt =**

de/dt = e'(t) = $\dot{e}$

Representación de funciones y derivadas



Sea la función **f(x)** y su derivada **f'(x)** representadas en un mismo gráfico:

Dado que la derivada toma en cada punto el valor de la pendiente de la función en el mismo, pasa por cero (corta al eje x), cuando la tangente a la curva es horizontal, es decir cuando la función pasa por un mínimo o un máximo. Es negativa (debajo del eje x) cuando la función original va en bajada, y positiva cuando va en subida. La derivada tiene a su vez puntos en los cuales su propia tangente es horizontal (máximos o mínimos de la derivada), que corresponden a puntos de la curva f(x) en los cuales cambia el sentido de la curvatura: Se llaman "puntos de inflexión" . Cuando avancemos en el estudio de las derivadas de funciones en particular trataremos con más detalle estos temas.

Algunas propiedades de las funciones derivadas

Lo mismo que para los límites, se pueden demostrar fácilmente para las funciones derivadas las siguientes propiedades, que nos serán muy útiles

La derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas. **d(f(x)+g(x))/dx = df(x)/dx + dg(x)/dx** , o también con la otra notación es **D(f+g)=Df+Dg**

La derivada de una constante es cero, ya que la gráfica de **y=Constante** es una recta horizontal, o sea de pendiente nula

La derivada de una constante **K** multiplicada por una función **f** es igual a la constante por la derivada:

d[K.f(x)]/dx =K.df(x)/dx , o también **D(K.f) = K.Df**

Cálculo y estudio de las funciones derivadas de funciones particulares

Función lineal

Sea **y=a.x+b**. calculemos su derivada. Para ello apliquemos la definición **f'(x)=lim Dx®0 f(x+Dx)-f(x)/ Dx**

Entonces es	**f(x+Dx)**	**= a.(x+Dx)+b**
	f(x)	**= a.x+b**

$$f(x+Dx)-f(x) \quad = a.Dx$$

$$\lim_{Dx®0} f(x+Dx)-f(x)/\ Dx = \lim_{Dx®0} a.Dx/Dx = a$$

¡Y, claro,...! La función derivada de una lineal es precisamente su pendiente **a**, que es constante para todo **x**

Función cuadrática

Sea $y=a.x^2+bx+c$

Entonces es $\quad f(x+Dx) = a(x+Dx)^2+b(x+Dx) +c$

$$= a(x^2+2x.Dx+[Dx]^2)+b(x+Dx) +c$$

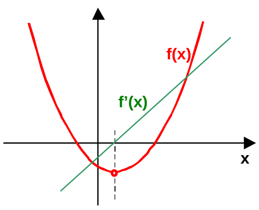
$$f(x) = ax^2+bx+c$$

$$f(x+Dx)-f(x) = 2a.x.Dx + a.\ [Dx]^2+b.\ Dx$$

$$\lim_{Dx®0} f(x+Dx)-f(x)/\ Dx =$$

$$\lim_{Dx®0} 2a.x + b + a.Dx = 2ax+b$$

O sea que la derivada de una función cuadrática es una recta.



Función potencial

Tomemos la función potencial $y=x^a$ y calculemos su cociente incremental $Dy/Dx = (x+Dx)^a-x^a\ /\ Dx$

Sabemos que la potencia de un binomio está dado por el siguiente desarrollo debido a Newton, válido para cualquier número **a**:

$$(x+Dx)^a = x^a + a\ (x^{a-1}.Dx) + a.(a-1)/2!\ (x^{a-2}.Dx^2) +$$

$$+ a.(a-1).(a-2)/3!\ (x^{a-3}.Dx^3) + ...$$

Si a es entero y positivo, el desarrollo es finito, y los coeficientes a, (a-1)/2!, ... son nuestros conocidos números del triángulo de Tartaglia.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

etcétera

Si **a** no es natural, el desarrollo genera una serie infinita de términos, cuya suma tiende (converge) al verdadero valor de la potencia del binomio, a medida que se toman cada vez más términos en el desarrollo.

Sea como fuere, los términos están formados por el producto del coeficiente de mentas y un producto de potencias crecientes de uno, y potencias decrecientes del otro de los términos del binomio.

Prosigamos calculando el numerador del cociente incremental $(x+Dx)^a-x^a = a\ (x^{a-1}.Dx) + a.(a-1)/2\ (x^{a-2}.Dx^2)$

$$+ a.(a-1).(a-2)/3!\ (x^{a-3}.Dx^3)$$

Dividiendo por **Dx** nos queda:

$$Dy/Dx = a.x^{a-1} + a.(a-1)/2\ (x^{a-2}.Dx)+$$

$$+a.(a-1).(a-2)/3!\ (x^{a-3}.Dx^2) +.....$$

Si pasamos al límite de la expresión anterior para **Dx®0** , se anulan los términos que tienen potencias de Δx, es decir que queda sólamente el primero, y entonces resulta :

$$\lim_{Dx®0} Dy/Dx = f'(y) = d(x^a)/dx = D\ x^a = a.x^{a-1}$$

La derivada de una función potencial es igual al producto del exponente y la variable elevada ésta a una potencia una unidad menor

Por ejemplo $D\ x^5 = 5\ x^4$

Derivada de un polinomio de grado n

Sea la función polinómica

$$y = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + a_2.x^{n-2} +...+ a_{n-1}.x+a_n$$

Aplicando lo visto antes, y teniendo en cuenta que la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas, es:

$$D\ y = y' = dy/dx = a_0.n.x^{n-1}+a_1.(n-1).x^{n-2}+...+a_{n-1}$$

O sea que la **derivación de un polinomio** da otro polinomio **un grado menor**. Como caso particular, la derivación de una función de segundo grado da una recta, de acuerdo a lo visto antes.

Se puede considerar, para generalizar, a la recta como un polinomio de grado uno, y a una constante como un polinomio de grado cero.

Derivada de función de función

La clave de la cómo derivar una función de una variable que a su vez es función de una segunda (ver lo dicho antes en el párrafo "función de función"), está en el concepto de diferencial, ya explicado.

En efecto, sea **y=f(u)** con **u=f(x)**, es decir **y=f[u(x)]**

En vez de derivar, escribamos la expresión de la diferencial de la función, es decir el incremento que se produce en la función para un incremento infinitesimal de la variable:

$d[y(u)] = y'_u.du$ siendo $y'_u = dy/du$

De la misma forma es $du = u'_x.dx$, con $u'_x= du/dx$

Reemplazando en la primera queda:

$$d[y(u)] = [y'_u.\ u'_x].dx$$

El producto entre corchetes $[y'_u.\ u'_x]$ es precisamente $dy/du = y'_x$, de acuerdo a la definición de diferencial, así que:

La derivada de una función de función es el producto de la derivada de la función con respecto a la primera variable y la derivada de esta primera variable con respecto a la variable independiente.

Es fácil demostrar que para más de una variable intermedia, se aplica la misma regla, es decir que para **y=f(u) , con u=u(v) y v=v(x)** es:

$$dy/dx= [dy/du].[du/dv].[dv/dx]$$

La notación de Leibniz, que expresa la derivada como cociente infinitesimal, permite trabajar algebraicamente con las diferenciales. En la expresión anterior se pueden simplificar las diferenciales de las funciones intermedias, quedando lo obvio: **$dy/dx=dy/dx$**

Se puede descomponer una función en varias "subfunciones" y aplicar la regla anterior para encontrar la derivada, por ejemplo sea **$y=(x^2-4)^3$**.

En vez de desarrollar el cubo, ponemos **$u=(x^2-4)$**, con lo que con **$y=u^3$** resulta **$dy/du=3u^2$**

Luego, para **$u=(x^2-4)$** es **$du/dx=2.x$**

Entonces es:

$y'_x= du/dx = [dy/du].[du/dx] = 3u^2.2x = 6x(x^2-4)^2$

Podemos, si queremos, desarrollar el cuadrado y poner **$y'_x = 6x\ (x^4- 8.x^2+16) = 6x^5- 48x^3+ 96x$**

A este resultado se llega con el proceso, más laborioso, de desarrollar primero el cubo del binomio:

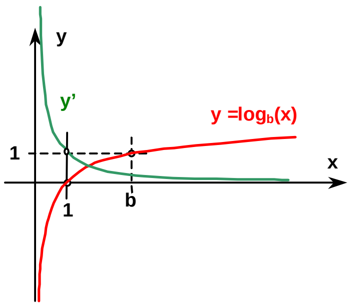
$y = (x^2-4)^3 = x^6- 12.x^4 + 48.x^2- 64$

y después derivar con respecto a la variable única x, aplicando el principio de que la derivada de una suma de términos es igual a la suma de las derivadas de cada uno de ellos:

$y' = 6.x^5- 48x^3+ 96x = 6x\ (x^4-8x^2-16) = 6x\ (x^2-4)^2$

Derivada de la función logarítmica - Base de los logaritmos naturales o de Neper

Recordemos la forma de la función logarítmica **$y=log_a(x)$**: corta al eje **x** en **x=1** (ya que **log (1)=0** para cualquier base), toma valores negativos muy elevados para **$x \to 0$**, es decir que podemos poner que



$\lim_{x \to 0}$ **$y =log_a(x) =- \infty$**

El logaritmo es siempre creciente: Al principio muy rápido cuando está cerca del eje **y** . A medida que aumenta **x**, sin dejar nunca de crecer, **y** lo hace cada vez menos. Para valores muy grandes de **x** la curva tiende a acostarse hacia la horizontal. De acuerdo a esto, la función derivada, cuyas ordenadas **y'** miden este crecimiento, tendrá valores muy altos para **x** bajos, e irá disminuyendo a medida que **x** crece. Será siempre positiva (sobre el eje **x**, en el primer cuadrante). Con estas pautas, hemos dibujado tentativamente **y'** en el mismo gráfico de la función **y**

La forma de y' tiene un aire de familia con una hipérbola equilátera, cuya función es C/x (C=constante)

¿Y si la derivada del logaritmo fuera realmente C/x?

Veamos qué nos dice el cálculo analítico. Para ello aplicamos la definición de derivada, como el límite del cociente incremental:

$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = \log (x+\Delta x)-\log (x) = \log (1+\Delta x/x)$

$\Delta y/\Delta x = 1/\Delta x.\ \log(1+\Delta x/x) = \log [(1+\Delta x/x)^{1/\Delta x}]$

Para que **$y'=C/x$** , de acuerdo a la forma tentativa de la curva derivada, debe ser **$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x = C/x$** , o sea

$\lim_{\Delta x \to 0} \log [(1+\Delta x/x)^{1/\Delta x}] = C/x$

Para ello debería ser, pasando **x** multiplicando al otro miembro **$C = \lim_{\Delta x \to 0} x.\ \log [(1+\Delta x/x)^{1/\Delta x}] =$**

$\lim_{\Delta x \to 0} \log [(1+\Delta x/x)^{x/\Delta x}]$

Pero el logaritmo de un límite es igual al límite del logaritmo, ya que el orden en que efectuemos ambas transformaciones (logaritmación y paso al límite) no afecta el resultado, por todo lo cual será:

$C = \log \{\lim_{\Delta x \to 0} [(1+\Delta x/x)^{x/\Delta x}]\}$

Para que el resultado sea una constante **C** (un número), el límite entre llaves debe ser otro número para el que el logaritmo esté definido, es decir que además debe ser positivo. Para estudiarlo mejor, reemplacemos **$x/\Delta x$** por un número **n**, que va tomando valores cada vez más grandes a medida que el incremento de la variable **x** se hace más y más pequeño, como lo exige la definición de derivada. Así será que:

$C = \log \{\lim_{n \to \infty} [(1+(1/n))^n]\}$

Nótese que la condición **$\lim_{\Delta x \to 0}$** queda reemplazada por la equivalente **$\lim_{n \to \infty}$** al hacer **$x/\Delta x = n$**

Calculemos la sucesión entre corchetes, con ayuda de una planilla de cálculo, para no hacer tantas cuentas:

n	**1/n**	**1+1/n**	**$(1+1/n)^n$**
1	1	2	2
5	0,2	1,2	2,48832
10	0,1	1,1	2,59374246
50	0,02	1,02	2,69158803
100	0,01	1,01	2,70481383
500	0,002	1,002	2,71556852
1000	0,001	1,001	2,71692393
10000	0,0001	1,0001	2,71814593
100000	0,00001	1,00001	2,71826824
1000000	0,000001	1,000001	2,71828047

Si bien este cálculo numérico no es una prueba matemática de la convergencia de la sucesión, cosa que no estamos en condiciones de desarrollar aquí, vemos "a ojo" que el límite tiende a un número **2,7182...**, del que ya se habló en el párrafo dedicado a los logaritmos y sus bases.

Quiere decir que la suposición de que la derivada del logaritmo es una función del tipo **C/x** es correcta, ya que reemplazando esta función en la definición de derivada llegamos a un resultado coherente.

Si ese número **e=2,7182..,** se toma como base de un sistema de logaritmos, resulta

$C = \log \{\lim_{n \to \infty} [(1+(1/n))^n]\} = \log_e \{e\} = 1$

con lo cual es:

$D \log_e (x) = d [\ln(x)]/dx = 1/x$

Los logaritmos de base **e** se llaman también "naturales" porque su base no es arbitraria, como la base 10 de los logaritmos decimales (o de Briggs), sino que sale naturalmente de razonamientos de cálculo.

Derivada logarítmica

Para calcular la derivada del logaritmo de una función, **D ln(y)**, siendo **y=f(x)**, se aplica la regla de derivación de función de función, poniendo para **u=ln(y)**, y siendo **du/dy=1/y** es **D ln(y)= du/dx = du/dy.dy/dx =1/y.y' = y'/y**

Este resultado es de la mayor importancia, ya que nos permite calcular fácilmente derivadas de productos y cocientes de funciones, como se verá a continuación.

Derivada de un producto

Para hallar la derivada del producto de dos funciones **f** y **g** , o sea **D(f.g)**, hallemos la derivada del logaritmo:

D log (f.g) = [D(f.g)]/(f.g) = D (log f+log g) = f'/f + g'/g
de donde **D(f.g) = [f'/f + g'/g] .f.g = f'.g + g'.f**

Es fácil ver que para la derivada de un producto de más de dos funciones vale la regla siguiente:

D(u.v.w) = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'

La derivada de un producto de varias funciones (un número finito de ellas) resulta de sumar tantos términos como funciones. Dichos términos se forman con el producto de la derivada de una cada una de las funciones por todas las restantes sin derivar.

Cuando una o varias de las funciones **u, v,** son negativas, no puede aplicársele logaritmos, con lo que carece de sentido **(ln u - ln v)**. Sin embargo el respectivo cociente entre la derivada y la función **u'/u , v'/v**, se mantiene positivo, ya que al cambiar de signo de la función, también lo hace el de su derivada, y la expresión **[D(u.v)]/u.v)] = u'/u + v'/v** sigue siendo válida.

Por ejemplo, sea hallar la derivada de la función

$y = (x^3-9).(x^2-4x)$; haciendo $u=x^3-9$, $v=x^2-4x$, $y=u.v$

se tiene : **$u'=3.x^2$; $v'=2x-4$** , y entonces

$y' = u.v' + v.u' = (x^3-9)(2x-4) + (x^2-4x)(3.x^2)$

Compruébese que se llega al mismo resultado haciendo el producto **u.v** y derivando luego el polinomio de quinto grado resultante.

Derivada de un cociente

Sea **y = u/v**. Para calcular **y'** hacemos

D ln y = y'/y = D ln(u/v) = D (ln u - ln v) = u'/u - v'/v
de donde **$y' = (u/v).(u'/u - v'/v) = u'/v - u.v'/v^2$**

Para hacerlo mnemotécnicamente más fácil :

$D (u/v) = (u'.v - u.v') / v^2$

La derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador multiplicada por el denominador, menos el numerador multiplicada por la derivada del denominador, todo ello dividido por el denominador al cuadrado.

Por ejemplo, sea la función racional **$y=(3x^3-2x)/(2-x)$**

poniendo **$u=3x^3-2x$** **$v=2-x$**

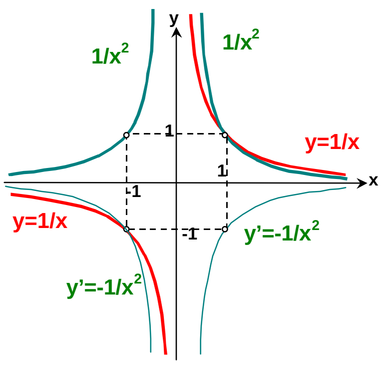
Entonces **$u'=9x^2-2$** **$v'=-1$**

$y'= (u'.v - u.v') / v^2 = [(9x^2-2)(2-x)+(3x^3-2x)]/(2-x)^2$

Derivada de la función 1/x

Como caso particular, haciendo **u=1** en la fórmula de la derivada del cociente, queda **$D (1/v)= -1/v^2$** , lo cual también se deduce a partir de la regla de derivación de una potencia, a saber: multiplicar la variable por el exponente y elevarla al exponente menos una unidad.

En efecto, para **$y = 1/v = v^{-1}$, es $y'= -1.v^{-2} = -1/v^2$**



En la figura se observa la gráfica de la función **y=1/x**, hipérbola equilátera cuyas asíntotas son los ejes x e y. Se ven también su derivada **$y'= -1/x^2$** y la función relacionada **$1/x^2$**, que es una curva con las mismas asíntotas que la hipérbola, pero que decrece más rápidamente.

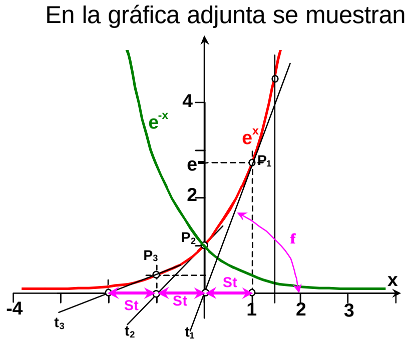
Derivada de la función exponencial

Sea la función exponencial **$y=a^x$.** Aplicando logaritmos resulta **ln(y)=x.ln(a)**. Derivando la anterior es **y'/y=ln(a)**, de donde **$y' = y.\ln(a) = a^x \ln(a)$**

Cuando **a =2,718...= e** , resulta **$D (e^x) = e^x$**

La exponencial e^x es una función que no cambia al ser derivada.

En la gráfica adjunta se muestran las funciones **e^x** y su simétrica **e^{-x}**



Si por los puntos **P_1, P_2, P_3** de la curva **e^x** , de abscisas **x_1, x_2, x_3** y ordenadas **e^{x1}, e^{x2}, e^{x3} ,** trazamos las respectivas tangentes **t_1, t_2, t_3**, vemos que estas cortan al eje **x** en puntos que determinan con la abscisa del punto **P** segmentos **St** iguales y unitarios. (Estos segmentos se llaman "subtangentes" a la curva para los respectivos puntos, y en el caso de la función exponencial valen 1 para cualquier punto de la curva).

Esto es así porque $e^x/\Delta x$ es la tangente trigonométrica al ángulo φ que forma la tangente geométrica **t** con el eje **x**, que según vimos coincide numéricamente con el valor de la derivada, en este caso igual a la función, es decir e^x

Derivadas de las funciones trigonométricas

Derivada de la función sen(x)

Calculemos primeramente

Δy = sen (x+Δx) - sen(x) = sen (x). cos (Δx) +

+ cos (x). sen (Δx) - sen (x) =

= sen (x) [cos(Δx) -1] + cos (x). sen (Δx)

Haciendo el cociente incremental resulta:

Δy/Δx={sen(x)[cos(Δx)-1]}/Δx + cos (x). [sen (Δx)]/Δx

= cos (x). [sen (Δx)]/Δx - {sen(x)[1-cos(Δx)]}/Δx

Pasando al límite, sabemos ya que en el primer término es: $\lim_{\Delta x \to 0}$ **sen (Δx)]/Δx = 1**

o sea que el primer término tiene como límite **cos(x)**

El límite para el segundo término tiene una indeterminación: $\lim_{\Delta x \to 0}$ **1-cos(Δx) / Δx = 0/0** , que debemos resolver comparando los infinitésimos numerador y denominador.

Para ello transformemos el numerador en una función del seno, recordando que hay una relación entre coseno de un ángulo **2α** y seno cuadrado de **α**:

$\mathbf{sen^2(\alpha) = [1\text{-}cos(2\alpha)] /2}$ de donde

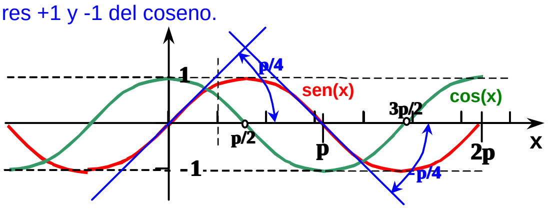
$\mathbf{[1\text{-}cos(\Delta x)] = 2.\ sen^2(\Delta x/2)}$, que es un infinitésimo de orden superior a **sen Δx**, y también a **Δx**

Así entonces

$\lim_{\Delta x \to 0}$ **1-cos(Δx)/ Δx =** $\lim_{\Delta x \to 0}$ $\mathbf{[2.\ sen^2(\Delta x/2)/\Delta x] = 0}$

Por lo tanto **D sen(x) = cos(x)**

Se observa en las gráficas de ambas funciones que cuando el seno llega a un máximo o un mínimo (tangente horizontal), el coseno, su derivada, pasa lógicamente por cero. También se ve que cuando el seno corta al eje x, lo hace bajo un ángulo de +45º o de -45º, que corresponde respectivamente a valores +1 y -1 del coseno.



Derivada de la función cos(x)

Se sabe que **cos(x) = sen (π/2-x)** de donde

D cos(x) = D sen (π/4-x)

Tomando la variable auxiliar **u = π/4-x** es

D sen (u) =cos (u) . Du = cos (π/2-x) (-1) = - sen (x)

Véase en el gráfico anterior que en los puntos en que **cos(x)** tiene pendientes extremas **-1** y **+1** , por ejemplo en **x=π/2**, y **x=3π/2**, la función **sen(x)** toma respectivamente los valores opuestos **+1** y **-1**, de allí el signo menos de la derivada.

Derivada de la función tg(x)

Como **tg(x)=sen(x)/cos(x),** poniendo **u=sen(x)** y **v=cos(x)** , y aplicando la regla de derivación de un cociente es:

$\mathbf{D\ tg\ (x) = D\ (u/v) = (u'.v - u.v') / v^2 =}$

$\mathbf{= [cos^2(x) + sen^2(x)] / cos^2(x) = 1/cos^2(x)}$

Derivada de la función ctg(x)

Análogamente se demuestra fácilmente que para

y = cotg(x) = cos(x)/sen(x) es

$\mathbf{y' = -1/sen^2(x)}$

Funciones recíprocas e inversas

No debe confundirse el término "**inverso/a**" con "**recíproco/a**".

Una función $\mathbf{y_i(x)}$ se dice **inversa** de otra **y(x)** cuando $\mathbf{y_i(y) = x}$, es decir que la función inversa devuelve el argumento de la variable independiente cuando se le introduce el valor de la función original.

Para hallar la función inversa, despéjese la variable independiente de la expresión **y=f(x)**, y permútense luego las variables **x** e **y**

Por ejemplo

$\mathbf{y=x^2}$, de donde $\mathbf{x=\sqrt{y}}$. Función inversa $\mathbf{y=\sqrt{x}}$

$\mathbf{y=e^x}$, de donde **x=ln(y)**. Función inversa **y= ln(x)**

y=(x+2) ½ , de donde $\mathbf{x=y^2\text{-}2}$ Función inversa $\mathbf{y=x^2\text{-}2}$

En cambio, $\mathbf{y_r(x)}$ es la función recíproca de **y(x)** cuando $\mathbf{y(x)=1/y_r(x)}$ o bien $\mathbf{y_r(x)=1/y(x)}$

Por ejemplo, **y=1/x** es la recíproca de **y=x** , **y=ctg(x)** es la función recíproca de **y=tg(x)**

Se ve que para **f(x)** y **g(x)** inversas, se cumple que

f(g) = g(f) = x

Por ejemplo para $\mathbf{f(x)=x^2}$ y $\mathbf{g(x)=\sqrt{x}}$ resulta $\mathbf{f(\sqrt{x}) = g(x^2) = x}$

Derivadas de las funciones inversas

La notación simbólica de Leibniz nos permite escribir la derivada de una función **y=f(x)** de la siguiente forma:

dy/dx. dx/dy =1 , de donde $\mathbf{y'_x = 1/x'_y}$, es decir que la derivada de la función original **y(x)** con respecto a la variable **x** es recíproca con la derivada de la función inversa **x(y)**, con respecto a la variable **y**

Por ejemplo para $\mathbf{y=x^2}$ y $\mathbf{x=\sqrt{y} = x^{½}}$ es:

$y'_x = 2x$ $x'_y = ½\, y^{-1/2}$

pero $y^{-1/2} = 1/x$ de donde

$x'_y = ½\, y^{-1/2} = 1/(2x) = 1/\, y'_x$

Funciones circulares inversas

Así entonces, de acuerdo a lo dicho, se llaman funciones trigonométricas o circulares inversas a las que dan el arco correspondiente a la función trigonométrica del valor que se introduce como argumento.

Se definen así:

y = arc sen (x), a la que da el arco cuyo **seno** es **x**

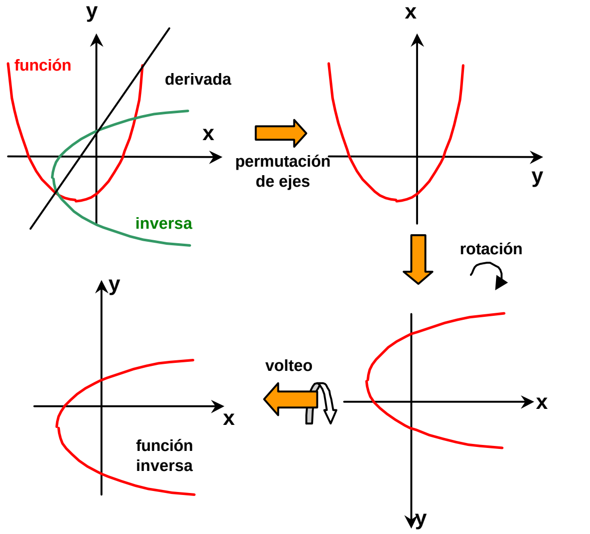
y = arc cos (x), a la que da el arco cuyo **coseno** es **x**

y = arc tg (x), a la que da el arco cuya **tangente** es **x**

¡Cuidado!: Algunas calculadoras usan sobre la tecla correspondiente, la inconveniente notación **sen^{-1}, cos^{-1} , tg^{-1}** para indicar las función inversas **arc sen , arc cos , arc tg**, confundiendo al operador novel, que podría suponer que al apretarla obtendrá el número recíproco del seno o coseno o tangente de lo que aparece en el display, mientras que en realidad obtendrá el valor del arco.

Gráfica de las funciones inversas

Se obtienen permutando los ejes, rotando y volteando la figura correspondiente, como se indica en el gráfico adjunto.



Derivada de las funciones circulares inversas

Para calcularlas, se aplica la propiedad **$y'_x = 1/x'_y$**, ya deducida.

Para **y=arc sen (x) es x=sen(y)**, entonces

Dy = 1/cos y .

Esta expresión no resulta útil, ya que conviene que el segundo miembro esté en función de x. Para ello transformamos **$\cos(y) = [1-sen^2(y)]^{½} = [1-x^2]^{½}$**

Entonces queda **$D\, arc\, sen\, (x) = 1/[1-x^2]^{½}$**

Análogamente se demuestra que:

$D\, arc\, cos\, (x) = -\, 1/[1-x^2]^{½}$

Para **y = arc tg (x)** es **x = tg(y)**, y entonces

$Dy = 1/(1/cos^2(y)) = cos^2(y)$, y reemplazando el coseno en función de la tangente (para poder expresar **y** en función de **x**) sabiendo que **$cos^2(y) = 1/[1+tg^2(y)]$**, resulta **$D\, arc\, tg\, (x) = 1/[1+x^2]$**

Funciones hiperbólicas

Se usan mucho en análisis matemático una serie de funciones que se llaman **hiperbólicas**, porque guardan con la hipérbola una relación parecida a las que tienen las funciones circulares con la circunferencia.

Las funciones hiperbólicas se definen matemáticamente en base a una variable **t** :

seno hiperbólico **$sh(t) = ½\ (e^t - e^{-t})$**

coseno hiperbólico **$ch(t) = ½\ (e^t + e^{-t})$**

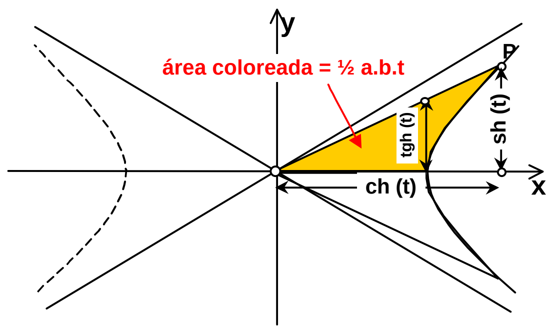
tangente hiperbólica **tgh(t) = sh(t)/ch(t)**

De las fórmulas surgen las siguientes relaciones:

sh(0)=0, **ch(0)=1,** **tgh(0)=1**

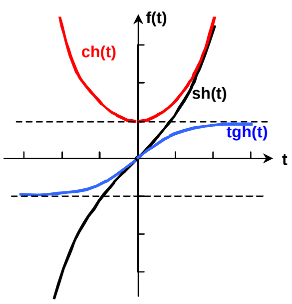
$ch(t)+sh(t)=e^t$ **$ch(t)-sh(t)=e^{-t}$** ,

y multiplicando las dos últimas es **$ch^2(t)-sh^2(t)=1$**



En la figura se ve una hipérbola cuya ecuación es

$(x^2/a^2)-(y^2/b^2) = 1$ donde **x=a.ch(t)** e **y=b.sh(t)**, pues de acuerdo a la definición es **$x^2/a^2=ch^2(t)$** e **$y^2/b^2=sh^2(t)$** , y ya vimos que **$ch^2(t)- sh^2(t)=1$**



En la página 24 se demuestra que el área coloreada, encerrada entre la curva y la recta que une el punto **P** con el origen, es numéricamente igual al parámetro **t**.

En la representación gráfica de las funciones hiperbólicas en función de la variable independiente **t**, vemos a la función **ch(t)**, que se parece a una parábola. Esta curva se llama **catenaria** (del latín catena : cadena) porque es la que adopta una cadena de muchos eslabones por acción de la gravedad cuando se suspede de sus extremos. El **sh(t)** se acerca indefindamente al **ch(t)** cuando **t®¥**. Se comprende por lo tanto que **lim** $_{\mathbf{t®¥}}$ **tgh(t) = 1**

Derivada de las funciones hiperbólicas

Es fácil demostrar aplicando las reglas de derivación de exponenciales que:

D sh(t) = ch(t)

D ch(t) = sh (t)

D tgh(t) = 1/ch^2(t)

Las funciones inversas de las hiperbólicas dan la variable independiente de la función, que se da en llamar "argumento de la función hiperbólica".

Así entonces

arg sh (t) se lee "argumento cuyo seno hiperbólico es igual a **t**". Resulta que **t = sh (f)**

arg ch (t) se lee "argumento cuyo coseno hiperbólico es igual a **t**". Resulta que **t = ch (f)**

arg tgh (t) se lee "argumento cuya tangente hiperbólica es igual a **t**" . Resulta que **t = tgh (f)**

De la misma manera que se dedujeron las derivadas de las funciones circulares inversas, en base a la relación **f'$_t$** = **1/t'$_{f(t)}$** se pueden deducir las fórmulas:

Para **f(t) = arg sh(t)** es **t = sh [f(t)]**, y entonces:

D f(t) = 1/ t'$_f$ = 1/ch(f) = 1/[1+ sh^2(f)]^{½} = 1/[1+t^2] ^{½}

Resulta así que **D arg sh(t)** = **1/[t^2+1] ^{½}**

Del mismo modo se deducen :

D arg ch (t) = **1/[t^2-1] ^{½}**

D arg tgh (t) = **1/[1-t^2]**

Las fórmulas relativas a las funciones hiperbólicas tienen dentro del gran parecido con las de las funciones circulares, una mayor simetría respecto a los signos más y menos.

LISTA DE DERIVADAS (por orden de aparición en el texto)

D 1 = 0

D x = 1

D x^a = a.x^{a-1}

D ln (x) = 1/x

D a^x = a^x . ln(a)

D e^x = e^x

D sen(x) = cos(x)

D cos(x) = - sen (x)

D tg (x) = 1/cos^2(x)

D cotg(x) = -1/sen^2(x)

D arc sen (x) = 1/[1-x^2)] ^{½}

D arc cos (x) = - 1/[1-x^2)] ^{½}

D arc tg (x) = 1/[1+x^2]

D sh(t) = ch(t)

D ch(t) = sh (t)

D tgh(t) = 1/ch^2(t)

D arg sh(t) = **1/[t^2+1] ^{½}**

D arg ch (t) = **1/[t^2-1] ^{½}**

D arg tgh (t) = **1/[1-t^2]**

Aplicación de las derivadas

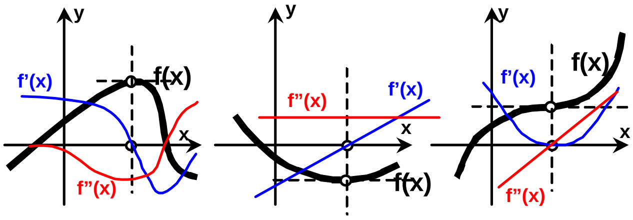
Máximos y mínimos de funciones (Extremos relativos)

Ya vimos que la anulación de la derivada de una función en un punto indica que allí la tangente a la curva es horizontal. Este hecho puede corresponder a que la función alcance en el punto considerado:

1. Un máximo relativo a un intervalo que incluye al punto, es decir que en el punto la función toma el valor mayor de todo el intervalo.
2. Un mínimo relativo a un intervalo, es decir que en el punto considerado la función toma el valor menor de todo el intervalo que incluye al punto.
3. Un punto de inflexión con pendiente nula, en el que el valor de la función se estanca para después retomar la misma tendencia con la que venía.

Los tres casos en que la función alcanza estos puntos especiales, llamados "extremos", se ilustran en la figura siguiente, en orden de izquierda a derecha:

Se comprende que esos puntos "extremos" son raíces



Funciones **f(x)** con sus primeras **f'(x)** y segundas **f"(x)** derivadas en el entorno de puntos extremos

de la ecuación que surge de igualar a cero la derivada de la función. Luego, para saber si se trata de un máximo, un mínimo o un punto de inflexión con derivada nula, se debe investigar la variación de la función a ambos lados del extremo.

Un método para ello es tomar valores muy cercanos a un lado y a otro del punto, y comparar el valor de la función en ellos contra el de la función en el punto central.

<u>Por ejemplo:</u>

Encontrar los puntos notables de la parábola cúbica **y=2x^3-3x^2+5**

Hacemos **y'$_x$ = 6x^2-6x = 0** de donde **x(6x-6)=0**, cuyas raíces son **x=0** y **x=1**

Averigüemos qué pasa en dichos puntos:

Para **x=0** es **y(0) =5** . Un poquito a la derecha de **x=0**, en **x=0,1** es **$y(0,1) = 2(0,1)^3$-$3(0,1)^2$+5 = 4,972**

A la izquierda de **x=0**, es **$y(-0,1) = 2(-0,1)^3$- $3(0,1)^2$+5 = 4,968**

Muy cerquita a ambos lados del extremo **x=0**, la función **$y(x)=2x^3-3x^2+5$** toma valores menores que en el propio punto. Por lo tanto se puede afirmar que el extremo **x=0** es un máximo.

En el otro punto notable, para **x=1**, la función **$y(x)=2x^3-3x^2+5$** toma el valor **y(1) = 2-3+5 = 4**

Tomamos un incremento pequeño de **x** , **Δx=0,1** igual al de antes, y calculamos **$y(x+\Delta x)$=y(1,1)=4,032**

De la misma forma **$y(x-\Delta x)$ = y(0,9) = 4,028**

Corriéndose un poquito a ambos lados de **x=1,** (se dice "en el entorno de x=1"), la función toma valores mayores que en el propio punto, por lo tanto se puede concluir que en el extremo **x=1** la función **$y(x)=2x^3-3x^2+5$** tiene un mínimo.

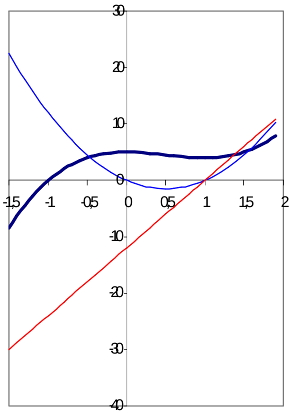
Otro método para investigar si el extremo es máximo, mínimo o punto de inflexión con pendiente nula, es analizar la variación de la función derivada alrededor de él. Por las propiedades de la función derivada y de acuerdo a las figuras anteriores, sabemos que cuando la función presenta un máximo, yendo en el sentido del eje x, la derivada cambia de signo en el punto de extremo pasando de positivo a negativo. Análogamente, muy cerca a la izquierda de un mínimo la derivada es negativa y positiva a la derecha. Por último en el tercer caso de extremo (punto de inflexión con pendiente nula), la función derivada toma valores de igual signo a ambos lados del extremo, en que se anula.

Se puede también investigar la existencia y carácter de extremos de funciones a través de la función derivada de la derivada, o derivada segunda de la función. Ésta, en caso de existir, contiene la información sobre la variación de la derivada primera. Recurriendo nuevamente a las figuras anteriores, está claro que cuando en un extremo la derivada primera (para diferenciar de la segunda recién presentada) pasa de más a menos significa que es decreciente. Vale decir que su pendiente es negativa y la segunda derivada, que representa esa pendiente, también lo será. Así que si en un punto donde se anula la primera derivada de una función, la segunda derivada es negativa, se trata de un máximo. Por la razón contraria podemos afirmar que hay un máximo en un punto en que la primera derivada se anula y la segunda es positiva. Además, un punto en el que una función tiene su primera y segunda derivada nulas corresponde a un punto de inflexión con tangente horizontal de dicha función.

Volviendo al ejemplo anterior, sea **$y=2x^3-3x^2+5$** . Vimos que la primera derivada es **$dy/dx = y'_x = 6x^2-6x$** . Derivando nuevamente se obtiene la segunda derivada **Δ y'(x)**, que también se simboliza **y''_x (x).** Resulta así que **y''_x = 12x-6**

Si en ella reemplazamos **x** por los valores para los cuales se anula la primera derivada (extremos), es:

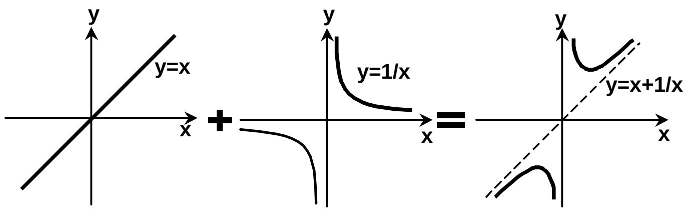
$y''_x(0)$ = 12.0-6 = -6 (<0) , $\Rightarrow$ en **x=0** hay un **máximo**.



$y''_x(1)$ = 12.1-6 = 6 (>0) , $\Rightarrow$ en **x=1** hay un **mínimo**.

En la figura se ha representado la **función,** la **primera derivada** y la **segunda derivada** mediante una planilla de cálculo, a partir de una tabla de valores entre **x=-1,5** y **x=1,9** , con una distancia de **Δx=0,1** entre puntos. Pueden apreciarse las relaciones entre ellas y entre los puntos extremos que se han deducido analíticamente anteriormente. Nótese que las escalas de los ejes no son iguales, por lo que las formas de las curvas están distorsionadas (el dibujo está encogido verticalmente).

<u>Otro ejemplo</u>: Estudiar la función **y=x+1/x**



La función que nos proponemos estudiar es la suma de dos funciones conocidas: la de la bisectriz del primer y tercer cuadrante (**y=x**) y la de la hipérbola equilátera (**y=1/x**). Cuando **$x \to \pm\infty$**, la función suma de ambas **y=x+1/x**, tiende a **y=x** , es decir que la recta **y=x** es una asíntota de la función en estudio. Asimismo, cuando **$x \to 0$**, tiende **y=x+1/x** a **$+\infty$** , cuando nos acercamos al origen desde las **x** positivas (desde la derecha). Si nos acercamos a **x=0** desde las **x** negativas, la función **y=x+1/x** tiende a **$-\infty$** . He aquí un caso de un límite distinto, según nos acerquemos desde la derecha o la izquierda al punto considerado, igual que lo que ocurre con la función **1/x**. o la función **tg(x)**

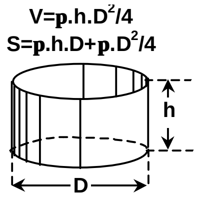
En la gráfica de **y=x+1/x** se ve que posee un máximo y un mínimo. Veamos qué nos dice el estudio a través de las derivadas primera y segunda, de acuerdo a lo visto. Empecemos por hallarlas:

$y' = 1-1/x^2$ **$y'' = \Delta\ -x^{-2} = 2.x^{-3}$**

Los puntos donde se esperan extremos son los que satisfacen la ecuación **y'=0**, es decir **$1-1/x^2$ = 0**, de donde **x=± 1.**

En **x=-1**, la segunda derivada vale **$y''(-1)=2.(-1)^3=-2$** (<0) , por lo tanto en **x=-1** hay un **máximo** relativo.

En **x=1**, la segunda derivada vale **$y''(1)=2.(1)^3=2$** (>0) , por lo tanto en **x=1** hay un **mínimo** relativo.



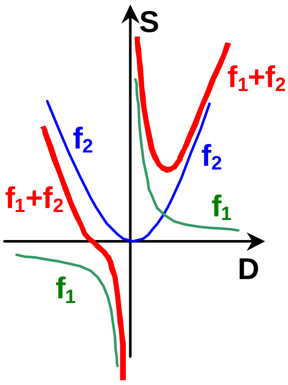
<u>Problema de aplicación</u>:

Se desea construir un tanque cilíndrico de eje vertical de un volumen **V** determinado con un mínimo de chapa, que se utilizará para la superficie lateral y el fondo circular (sin tapa).

El volumen vale superficie de la base por altura, o sea **$V=\pi.h.D^2/4$**

La cantidad de chapa viene dada por la superficie de la misma, que es la superficie lateral del tanque más la superficie del fondo **$S = \pi.D.h + \pi.D^2/4$**

Eliminemos a la variable **h** de la expresión anterior (altura del tanque), de la que no sabemos nada a ciencia cierta, y en cambio expresemos la superficie **S** en función del diámetro **D** y del volumen **V**, que sabemos que es un dato fijo del problema:



$S = 4V/D + \pi.D^2/4$.

De esta función **S** se debe encontrar el mínimo para un determinado volumen **V** constante. Se ve que **S** es la suma de dos términos.

El primero representa la superficie lateral y es una función **f_1** recíproca de **D** (cuya representación gráfica es una hipérbola). El segundo representa la superficie del fondo, y es una función **f_2** cuadrática de **D** (cuya representación gráfica es una parábola de eje vertical que pasa por el origen).

Analizaremos la función suma **f1+f2 = S** sólo para **D>0**, ya que valores de **D<0** (diámetros negativos) no corresponden a la realidad física del problema.

S presenta un mínimo en el primer cuadrante, donde se anula su derivada, es decir para **$S'_D = dS/dD = -4V/D^2 + \pi.D/2 = 0$** , de donde **$4V/D^2=\pi.D/2$**, y **$D^3 = 8V/\pi$**, y reemplazando **$V=\pi.h.D^2/4$** resulta **$D^3=2.h.D^2$** por lo tanto **D=2.h**

Que es un mínimo se demuestra matemáticamente estudiando el signo de la segunda derivada:, sin necesidad de reemplazar en ella valor alguno de **D**, ya que

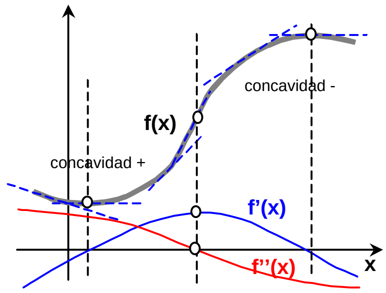
$d^2S/dD^2 = S''_D = 8V/D^3+\pi/2$, es siempre positivo para **D>0**

Para un tanque con tapa, es **$S = 4V/D + \pi.D^2/2$**, y la solución del problema se logra para:

$--4V/D^2+\pi.D=0$ de donde **$D^3 = h.D^2$** por lo tanto **D=h** (un tanque de altura igual al diámetro)

El tanque cilíndrico sin tapa de mínima superficie de chapa para un volumen dado, es el que tiene una altura igual a la mitad del diámetro, o sea igual al radio de la base. En caso de tener que construir la tapa circular de chapa, la superficie mínima se obtiene para una altura igual al diámetro (o sea dos veces el radio).

Aplicaciones de la segunda derivada. Concavidad y puntos de inflexión de funciones

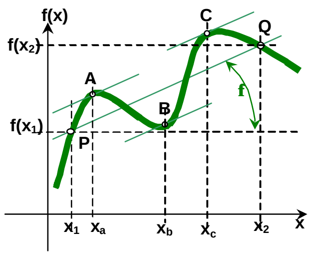


En la figura se ve el gráfico de una función **f**, de su derivada **f'** y de su segunda derivada **f''**. El signo de la segunda derivada da cuenta de cómo varía la primera. Es positivo mientras la primera derivada "sube", pasa por cero donde ésta tiene un extremo (máximo o mínimo) y es negativa cuando la primera derivada "baja". La subida o bajada de una derivada, y consecuentemente el signo de la segunda derivada, se corresponde con el aumento o disminución de la pendiente de la función. Recorriendo una curva hacia las **x** positivas, el aumento de su pendiente se nota por la **concavidad** hacia las **y** positivas (hacia arriba), y la disminución de su pendiente está marcada por la **concavidad** hacia abajo que la curva representativa de la función presenta en el tramo considerado. La segunda derivada es una **medida de esa concavidad** en signo y en valor absoluto. De acuerdo a esto, una concavidad positiva es hacia las y positivas, y una concavidad negativa indica que la función es convexa hacia esta misma dirección.

El punto donde la concavidad cambia de signo se llama **punto de inflexión** de la función, y en él se anula la segunda derivada. Cuando también se anula la primera, se está en el caso particular ya visto de un punto de inflexión con pendiente nula.

Teorema del valor medio del cálculo diferencial

La expresión del incremento **$\Delta f(x)= f(x_2)-f(x_1)$** que toma una función en un intervalo **(x_1,x_2)** en función del valor se ese intervalo **(x_2-x_1)** se deduce de la figura como: **$[f(x_2)-f(x_1)]/(x_2-x_1) = tg\ \varphi$**



donde **φ** es el ángulo que forma la secante **PQ** con el eje de las **x**. Además es **$tg(\varphi) = f'(x_a) = f'(x_b) = f'(x_c)$** , que son los valores que toma la derivada de la función en puntos intermedios A, B, C del intervalo considerado. En la figura se ven tres puntos intermedios porque, a propósito, se ha elegido una función que tiene varias ondulaciones en el intervalo. Sin embargo, en el caso de la función más simple que se pueda imaginar, se encontrará por lo menos un punto intermedio en que la tangente geométrica sea paralela a la secante.

En tal caso podremos expresar el incremento de la función como **$\Delta f(x) = f(x_2)-f(x_1) = f'(x_i)\ (x_2-x_1)$** , o bien **$f(x_2) = f(x_1)+ f'(x_i)\ (x_2-x_1)$** siendo **$x_i$** la abscisa de un punto intermedio del intervalo. Esta es la expresión matemática **del teorema del valor medio.**

Se comprende que cuando $x_2 \to x_1$ es $x_i \to x_1$, y también

$f(x_2) \to f(x_1)$

$f(x_2)-f(x_1) \to d\, f(x_1)$

$(x_2-x_1) \to d(x_1)$

Por lo tanto $d\, f(x_1)/\, d(x_1) = f'(x_1)$ y también

$d\, f(x_1) = f'(x_1)\, .\, d(x_1)$, que coincide con las definiciones de derivada y diferencial dadas anteriormente.

Todo lo anterior es válido siempre y cuando la función sea continua en el intervalo y tenga derivada única en todos sus puntos. No es aplicable el teorema cuando la función tiene saltos y quiebres en el intervalo.

Límites indeterminados. Regla de L'Hôpital

Aplicado a dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ que se anulen ambas para un mismo valor en $x=x_1$, esto es que $f_1(x_1)=f_2(x_1)=0$, el teorema del valor medio da:

$\Delta f_1(x) = f_1(x_2)-f_1(x_1) = f_1(x_2) = f'_1(x_i)\ (x_2-x_1)$

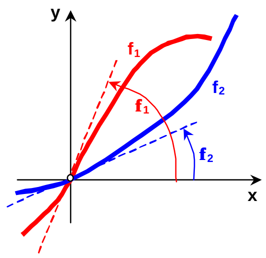
$\Delta f_2(x) = f_2(x_2)-f_2(x_1) = f_2(x_2) = f'_2(x_i)\ (x_2-x_1)$

Dividiendo miembro a miembro, resulta:

$f_1(x_2)/\ f_2(x_2) = f'_1(x_i)/\ f'_2(x_i)$

Tomando límites para $x_2 \to x_1$ es

$\lim_{x_2 \to x_1} f_1(x_1)/\ f_2(x_1) = f'_1(x_1)/\ f'_2(x_1)$



Principio de la Regla de L'Hôpital
lím $f_1(0)/\ f_2(0) = tg(f_1)/\ tg(f_2)$

Es decir que se el valor de un límite indeterminado del tipo **0/0** es equivalente al cociente entre el valor de las derivadas del numerador y el denominador en el punto de indeterminación. (Regla inspirada por el célebre Juan Bernoulli al matemático Guillermo de L'Hôpital, quién la incluyó en su tratado de cálculo en 1696)

En la figura se ven dos funciones que toman valor nulo en el origen bajo diferentes pendientes. El límite del cociente entre ambas está dado, de acuerdo a lo que hemos visto, por el cociente de los valores de las tangentes en el origen.

Por ejemplo calcular el límite de **sen(x)/x** para $x \to 0$, o sea $\lim_{x \to 0} sen(x)/x = cos(0) / 1 = 1$

Las funciones **sen(x)** y **x** arrancan del origen con la misma pendiente (unitaria).

Se justifica la aplicación reiterada si la indeterminación sigue después de aplicada la regla: en tal caso el cociente de funciones pasa a ser cociente de derivadas y el de derivadas pasa a ser cociente de derivadas segundas.

Así $\lim_{x \to 1} [x^3-3x+2]/[e^x-e.x] = \lim_{x \to 1} [3x^2-3]/[e^x-e] =$

$\lim_{x \to 1} 6x/e^x = 6/e \cong 2{,}207$

Derivadas sucesivas

Las funciones pueden o no tener derivadas. Ello depende en gran medida de su continuidad, esto es de la propiedad de que su gráfica no se quiebre o se corte. En el punto de quiebre hay una derivada por izquierda y otra por derecha. En un salto o escalón vertical descendente, la derivada toma valores negativos infinitamente grandes.

Cabe mencionar que hay funciones continuas especiales, definidas por algoritmos complicados y no por funciones simples, que no tienen derivada en ningún punto. Para enterarse de tales curiosidades los remitimos a tratados de análisis matemático superiores.

Hay funciones que, como hemos visto, admiten derivadas sucesivas: dos, tres y más. Inclusive hay funciones que admiten infinitas derivadas.

Por ejemplo, un polinomio de grado **n** admite **n** derivadas sucesivas. Sea $y=x^2$, es $y'=2x$, $y''=2$, y de aquí en más las derivadas sucesivas valen cero.

Las funciones logaritmo, exponencial, trigonométricas circulares e hiperbólicas tienen infinitas derivadas sucesivas (demuéstrese)

Notación diferencial de Leibniz para las derivadas sucesivas. Diferenciales sucesivas

Vimos ya que la derivada segunda de **y=f(x)**, por ejemplo, se define como $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f'(x)/\Delta x = y''$

Pero $\Delta f'(x)/\Delta x$ puede escribirse $\Delta[dy)/dx] / \Delta x$ y cuando se pasa al límite queda $y'' = d\ [dy/dx]\ /\ dx$, de donde sale la expresión de la diferencial segunda, o diferencial de la diferencial:

$d(dy) = y''\ dx.dx = y''\ (dx)^2$

Se adopta la notación $d(dy) = d^2y$, y $(dx)^2=dx^2$,

con las cuales es $y'' = d^2y/dx^2$

Y en general, para la derivada sucesiva enésima se escribe, con idéntico significado:

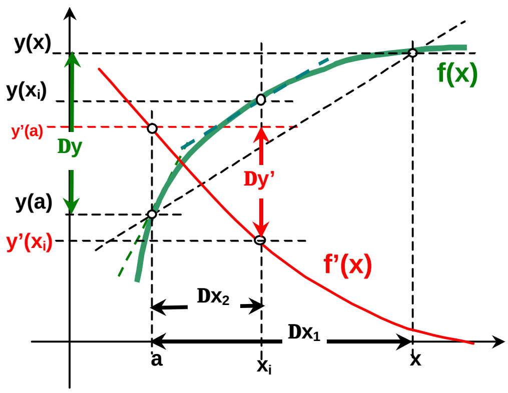
$y^{n\prime} = D^ny = d^ny/dx^n$ y además $d^ny = y^{n\prime}.\ dx^n$

Significado del valor de la derivada enésima en un punto

El valor de la derivada de una función en un punto nos informa sobre su pendiente allí. El valor de la derivada segunda en ese mismo punto nos da, de acuerdo a lo visto, noticias sobre su concavidad.

Se comprende que los respectivos valores de las sucesivas derivadas en un punto (cuando existen), nos agregan cada vez más información sobre las propiedades de la función en el entorno del punto considerado. Por ejemplo, que la tercera derivada valga cero define que la concavidad tiene allí un extremo relativo. Asimismo, el signo de la cuarta derivada nos indica si en este punto hay un máximo o un mínimo de la concavidad.

Aplicación reiterada del teorema del valor medio. Desarrollo de funciones en series de potencias con coeficientes que dependen de las derivadas sucesivas en un punto



Volviendo al teorema del valor medio, este dice que el incremento **Dy** de una función para un incremento **Dx** de la variable independiente es igual al valor **y'(x$_i$)** de la derivada de la función en un punto intermedio **x$_i$** de dicho intervalo, multiplicado por el incremento **Dx** de la variable independiente. Así entonces

Dy= y'(x$_i$). Dx$_1$ **[1]**

Ahora bien, el valor de la derivada en **x$_i$** puede considerarse como el valor en el comienzo del intervalo **a** más un incremento **Dy'** tal que (ver figura):

y'(x$_i$)=y'(a)+ Dy' **[2]**

Aplicando otra vez el teorema del valor medio, se puede reemplazar **Dy'=y''(x$_i$).Dx$_2$** , con lo cual la [2] pasa a escribirse como

y'(x$_i$)=y'(a)+ y''(x$_i$).Dx$_2$ con un intervalo **Dx$_2$** que es una fracción del intervalo inicial (véase la figura), o sea que para un coeficiente **C$_1$>1** será **Dx$_2$= Dx$_1$/C$_1$** **[3]**

Siendo, de la misma manera,

y''(x$_i$)=y''(a)+ Dy''= y''(a)+ y'''(x$_i$).Dx$_3$

con **Dx$_3$= Dx$_2$/ C$_2$** **[4]**

y en general **y^n(xi) = y^n(a)+y^{n+1}(x$_i$).Dx$_{n+1}$**

con **Dx$_{n+1}$ = Dx$_n$/ C$_n$** **[4 bis]**

Reemplazando la [4] en la [3] nos queda:

y'(x$_i$)={y'(a)+ [y''(a)+ y'''(x$_i$).Dx$_3$].Dx$_2$} **[5]**

Reemplazando la [5] en la [1] nos queda:

Dy= {y'(a)+ [y''(a)+ y'''(x$_i$).Dx$_3$].Dx$_2$}. Dx$_1$ =

Dy = y'(a) Dx$_1$+ [y''(a)/C$_1$]. Dx$_1$^{2}+ [y'''(x$_i$)/C$_1$/C$_2$] Dx^3

y teniendo en cuenta la fórmula de recurrencia [4 bis] se deduce para la anterior, con

Dy = f(x)-f(a) y **Dx$_1$ = (x-a)**

f(x) = f(a) + f'(a) (x-a) + [f''(a)/C$_1$](x-a)^2 +

+ [f'''(a) /C$_1$/C$_2$] (x-a)^3 +[f^{iv}(a)/C$_1$/C$_2$/C$_3$] (x-a)^4+...

... + f^n(a) /C$_1$/C$_2$/...C$_{n-1}$] (x-a)^n...

Para calcular los coeficientes **C$_1$**, **C$_2$**, **C$_3$**,..., que de acuerdo a lo dicho deben ser mayores que la unidad, ya que cada incremento del término es una fracción del anterior, se van derivando sucesivamente ambos miembros de la igualdad anterior, con lo que se tiene:

f'(x) = f'(a) + [2.f''(a)/C$_1$](x-a) + [f'''(a).3/C$_1$/C$_2$] (x-a)^2+..

Derivando la anterior, es

f''(x)= [2.f''(a)/C$_1$] + [f'''(a).3.2/C$_1$/C$_2$] (x-a) +..

Haciendo **x=a**, se tiene **f''(a) = f''(a)2/C$_1$**, de donde **C$_1$=2**

Derivando la anterior, es

f'''(x)= + [f'''(a).3.2/C$_1$/C$_2$] +..

Haciendo **x=a**, se tiene **f'''(a) = f'''(a).3.2/C$_1$/C$_2$** de donde **C$_1$.C$_2$=3.2** , y como **C$_1$=2** es **C$_2$=3**

Con el mismo procedimiento se obtiene en general que **C$_n$=n+1** con lo que el desarrollo queda:

f(x) = f(a) + f'(a) (x-a) + [f''(a)/2](x-a)^2 +

+ [f'''(a) /3/2] (x-a)^3 +[f^{iv}(a)/4/3/2] (x-a)^4+...

... + f^n(a) /n!] (x-a)^n...= S$_{i=0,1,2...n}$ f '^{i}(a)/i!.(x-a)^i

Este desarrollo en serie de potencias de una función, con coeficientes que dependen del valor que toman en un punto sus derivadas sucesivas, se debe al matemático inglés Brook Taylor (1685-1731), y se conoce como desarrollo de una función derivable en **serie de Taylor**

En particular, si se conocen las derivadas en el origen (**x=0**), el desarrollo de **Taylor** toma la forma más sencilla:

f(x) = S$_{i=0,1,2...n}$ f '^{i}(0)/i! x ^{i}, que se conoce como serie de **M^{c}Laurin**

Cuando la función admite infinitas derivadas sucesivas, el desarrollo es una serie infinita. Cuando tiene un número finito **n** de derivadas, el desarrollo es un polinomio de grado **n** y **n+1** términos

Comparación de varios métodos de desarrollo en serie

Hay varias formas de desarrollar una función en serie de potencias de la variable. Demuestran los matemáticos que ese **desarrollo es único**, o sea que los coeficientes del polinomio son los mismos sea cuál fuere el método para obtenerlos.

Por ejemplo se sabe que la suma de una progresión geométrica de razón **r <1** vale

S = 1/(1-r) = 1 + r + r^2 + r^3 +...+ r^n

El desarrollo anterior puede obtenerse ya sea por división, por elevación a potencias del binomio (generalización del binomio de Newton) o por desarrollo de Taylor-M^{c}Laurin.

El primer método consiste en dividir algebraicamente, como en una división numérica.

El segundo método consiste en elevar (1-r) a -1 a través del desarrollo del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \mathbf{a}^i.\mathbf{b}^{n-i} \quad \text{o sea}$$

$$(1-r)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-1}{i} (-r)^i.1^{-1-i}$$

Los coeficientes ( ) son números combinatorios definidos por:

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!.(a-b)!} = \binom{a}{a-b} \qquad \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!.3!} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1 \quad 2.1} = \frac{5.4}{2.1} = 10$$

$$\binom{a}{b} = \frac{a.(a-1)....(a-(b+1))}{b!}$$

$$\binom{a}{0} = 1 \quad \binom{a}{1} = a \quad \binom{-1}{2} = \frac{(-1).(-2)}{2.1} = 1 \quad \binom{-1}{3} = \frac{(-1).(-2).(-3)}{3.2.1} = -1$$

$$\binom{-1}{4} = \frac{(-1).(-2).(-3).(-4)}{4.3.2.1} = 1$$

Los coeficientes con **i = par** valen **+1** y están en los términos multiplicados por $(-r)^i = +r^i$, por lo tanto son términos positivos.

En la serie que estamos estudiando los coeficientes con **i = impar** valen **(-1)** y están en los términos multiplicados por $(-r)^i = -r^i$, por lo tanto son términos también positivos.

Como se ve, el desarrollo por binomio de Newton da la misma serie que la obtenida por división.

Veamos ahora el desarrollo de Taylor-M^c^Laurin:

$f(r) = 1/(1-r) = (1-r)^{-1}$	$f(0)=1$
$f'(r) = -(1-r)^{-2}(-1) = (1-r)^{-2}$	$f'(0)=1$
$f''(r) = (-2).(1-r)^{-3}(-1) = 2.(1-r)^{-3}$	$f''(0)=2$
$f'''(r) = (-3).2(1-r)^{-4}(-1) = 3.2.(1-r)^{-4}$	$f'''(0)=3!$

....

$f^{n'}(r) = n!\,(1-r)^{-n-1}$	$f^{n'}(0)=n!$

Los coeficientes de la serie valen todos $f^{i'}(0)/i! = 1$

con lo que el desarrollo en serie resulta $1 + r + r^2 + r^3...$, como en los otros dos casos. (¡Toda la matemática estaría en aprietos si así no fuera!)

Por más que lo anterior no sea una demostración cabal de que el desarrollo en serie es **único**, refuerza con un ejemplo la equivalencia del resultado de expandir una función en serie por cualquier método.

Desarrollo finito e infinito. Término complementario del desarrollo

El desarrollo en serie de Taylor-M^c^Laurin muestra que la información necesaria para construir una función está contenida en las propiedades intrínsecas de la misma en cualquier punto. Estas propiedades son el valor de las derivadas sucesivas en el punto elegido, a partir de las cuáles puede expandirse la función a un intervalo próximo.

El desarrollo en serie reproduce exactamente la función cuando la serie está completa. Si la función tiene un número finito de derivadas, por ejemplo un polinomio de grado **n**, que tiene **n** derivadas distintas de cero, la serie de **n+1** términos lo reproduce exactamente. Si la función tiene un número infinito de términos, como la del ejemplo anterior, la serie que la reproduzca exactamente debe ser infinita. En todos los casos, el desarrollo puede truncarse en un determinado término de orden **j**, aproximando a la función a un polinomio de grado **j+1** tanto mejor en la medida de que el corte se acerque al número de términos del desarrollo exacto.

La diferencia entre la función y el desarrollo trunco se puede acotar, esto es estimar un valor ligeramente superior, en un término complementario T_n

El término complementario es la suma de los términos que siguen al último expresado en la serie. Por aplicación del teorema del valor medio, se deduce para el término complementario:

$$T_n = f(x) - \Sigma_n f^{'i}(a)/i!\,(x-a)^i = f^{n+1}(x_i)\,/(n+1)!]\,(x-a)^{n+1}$$

con **a< x_i <x** (x_i = valor intermedio del intervalo a,x)

Expresión incremental del desarrollo en serie

Volviendo a la fórmula del desarrollo de Taylor:

$$f(x)-f(a) = f'(a)\,(x-a) + [f''(a)/2!](x-a)^2 + [f^{3'}(a)/3!]\,(x-a)^3 + $$
$$+ [f^{iv}(a)/4!]\,(x-a)^4 + ... + f^{n+1}(x_i)\,/(n+1)!]\,(x-a)^{n+1}$$

Poniendo las diferencias como incrementos, es decir haciendo **f(x)-f(a) = Δ f(x)** y **(x-a) = Δx** resulta la expresión incremental de la serie de Taylor:

$$\Delta f(x) = f'(x).\Delta x + f''(x)/2!\,(\Delta x)^2 + ... + f^n\,(x_i)/n!]\,(\Delta x)^n$$

El término **f'(x). Δx** es el término principal del incremento, que se transforma en la diferencial primera cuando **Δx** tiende a cero. El resto de los términos se transforman en las diferenciales sucesivas, y son infinitésimos de orden superior. Su suma es un infinitésimo de segundo orden. El término complementario es un infinitésimo de orden superior al último término de la serie trunca. (Demuétrese)

Desarrollo en serie de y=ln(x)

El método de Taylor-M^c^Laurin es el obligado en el caso de funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas. Por ejemplo tomemos la función logaritmo:

$y = \ln(x)$	$y' = 1/x$	$y'' = -1/x^2$
$y''' = 2/x^3$	$y^{iv} = -3!/x^4$	$y^v = 4!/x^5$
y en general	$y^{n'} = (n-1)!/x^n$	

Como **ln(x)** no está definido para **x=0**, no podremos utilizar la serie de M^c^Laurin, y en cambio si la de Taylor para **a=1**, con **ln(1)=0** como primer término de la serie.

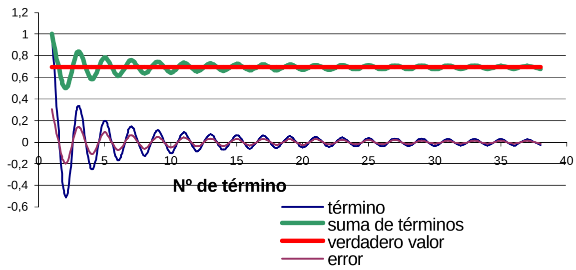
$$\Sigma_{i=0,1,2...n} f^{'i}(a)/i!.(x-a)^i = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + 1/3\,(x-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x-1)^4 ..... + 1/n\,(x-1)^n\,(-1)^{n+1}$$

Reemplazando **x=2** en el desarrollo, resulta la serie alternada **1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 ....**, cuya suma se aproxima a **ln(2) = 0,69314718...** con un error menor que el término complementario, $\mathbf{T_n = 1/n\ (x_i\text{-}1)^n\ (\text{-}1)^{n+1}}$

Por ejemplo, para n=5, la suma resulta 0,7833 , que frente al verdadero valor de 0,6931 da un error de 0,09.

Si no conociéramos el verdadero valor, podríamos afirmar que el error cometido será inferior al del término complementario, tomando como punto intermedio $\mathbf{x_i=2}$ (el extremo del intervalo, para cubrirse), con lo cual $\mathbf{T_n = 1/5\ (1)^5\ (\text{-}1)^{n+1} = 0{,}2}$

Estudio de la serie ln(x)
para x=2



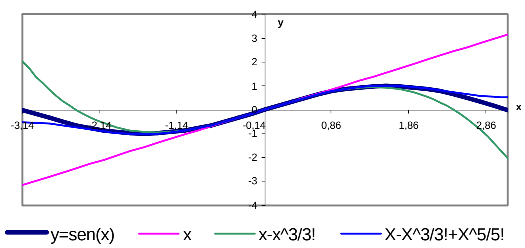
Con una planilla de cálculo se ha generado el gráfico anterior, donde se muestran los resultados de sumar hasta 38 términos de la serie.

Desarrollo en serie de y=sen(x)

Se demuestra fácilmente que la función **y = sen(x)** tiene un desarrollo infinito en serie alternada de potencias impares:

$$\mathbf{sen(x) = x\text{-}\ 1/3!x^3 + 1/5!x^5 \ ...+ (\text{-}1)^{n\text{-}1}/(2n\text{-}1)!\ x^{(2n\text{-}1)} + T_n}$$

Aproximaciones polinómicas a sen(x)



En el gráfico se representan junto a la función **y=sen(x)**, los polinomios aproximados con un término (la recta **y=x**), dos términos (la parábola de tercer grado $\mathbf{y=x\text{-}x^3/3!}$), y tres términos (la función de 5º grado $\mathbf{y= x\text{-}x^3/3!+x^5/5!}$)

Nótese cómo se va ajustando la serie a la función original a medida que se aumenta el número de términos.

Otros desarrollos en serie

Como ejercicio, demostrar las siguientes fórmulas, aplicando el desarrollo en serie de Taylor-M^{c}Laurin:

$$\mathbf{cos(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x*/6!..+ (\text{-}1)^n\ x^{2n}/(2n)! + T_n}$$

$$\mathbf{tg(x) = x + 1/3\ x^3 + 2/15\ x^5 + 17/315\ x^7 + T_n}$$

$$\mathbf{e^x = 1 + x + x/2! + x/3! +..+ x/n! + T_n}$$

CÁLCULO INTEGRAL

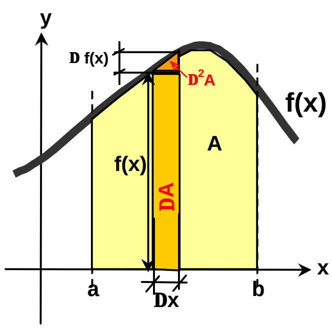
Hemos aprendido, a través de las páginas anteriores, a escudriñar las propiedades microscópicas e intrínsecas de las funciones hallando sus funciones derivadas y calculando sus partes diferenciales.

El problema inverso de ir de lo diferencial a lo íntegro, de la célula al órgano, de la derivada a la función, se resuelve mediante una serie de técnicas que se conocen como Cálculo Integral.

Integral quiere decir suma. Una suma que va más allá de la adición discreta de términos. Así como diferencial quiere decir algo más que "una pequeña parte del total", más bien una parte infinitesimal definida a través del "paso al límite", integral quiere decir una suma especial de esas infinitas partes diferenciales para reconstituir el todo original del que provienen. Veremos que la integración es un proceso de síntesis, opuesto a la diferenciación o derivación, que lleva de la derivada a la función primitiva.

Área bajo una curva - Integral definida e indefinida

Se dijo en la introducción al tema del cálculo infinitesimal que el hombre se planteó y a veces resolvió problemas de cálculo integral antes que de diferencial. Para ello ideó métodos para sumar términos elementales en los que imaginaba estaban descompuestas las cosas "grandes". Calculó superficies y volúmenes como suma de elementos indivisibles, precursores de nuestros infinitésimos o diferenciales. Halló funciones a partir de otras, que eran en realidad sus derivadas, como lo advertimos ahora cabalmente.



Con razonamiento parecido al que nos llevó desde la tangente geométrica de una curva al concepto de derivada, llegaremos al concepto de integral a través del área encerrada debajo de una curva

Consideremos esa curva como la gráfica de una función de ecuación **y=f(x)**

Podemos considerar el área **A** sombreada bajo la curva **f(x)** entre abscisas **a** y **b**, aproximándola a la suma del área individual de un número conveniente de elementos trapeciales compuestos cada uno de ellos por un fino rectángulo **DA** de base **Dx** y altura **f(x)** y un triangulito **D²A** de base **Dx** y altura **Df(x)**. Cuánto más finos sean los rectángulos, y consecuentemente más pequeñitos sean los triángulos, mayor será el número y mejor se adecuarán los trapecios resultantes para cubrir la superficie.

Si la curva fuera una poligonal, esto es una sucesión de segmentos de recta adosados, el número de trapecios necesarios para tapizarla es finito. Pero si hay partes de la función que sean curvas, se comprende que el lado superior recto del trapecio no pueda adecuarse perfectamente sobre el arco de curva. Pero una curva puede considerarse como el límite de una poligonal cuando sus lados se hacen infinitamente pequeños. En tal caso se entiende que bajo la curva se puedan acomodar trapecios de lado **Dx®0,** es decir de lado diferencial **dx.** Se necesitarán entonces un número infinito de trapecios diferenciales para cubrir el área bajo una curva. El valor de dicha área será la suma de las infinitas áreas trapeciales diferenciales en las que se descompone.

El cálculo de una suma de infinitos términos finitos da infinito. Sin embargo aprenderemos en breve que la suma de infinitos diferenciales infinitésimos da generalmente un valor finito.

Así pues, imaginemos que tenemos cubierta aproximadamente nuestra superficie con un número finito de trapecios, y que para adecuarnos perfectamente a su forma, pasamos al límite haciendo **Dx®0** . Con ello los incrementos finitos **DA=f(x).Dx** y **D^{2}A=½.Df(x).Dx** pasan respectivamente a los infinitésimos de primer y segundo orden **dA=f(x).dx** y **d^{2}A=½.df(x).dx** los que sumados dan un infinitésimo equivalente al primero, o sea a **dA**

Se puede tomar así a **dA** como la diferencial de una función **A**, que representa el área debajo de la curva.

Para hallarla debemos buscar una función tal que derivada nos dé **f(x)**, ya que **dA/dx = f(x)**. Se trata pués de idear un proceso inverso al de la derivación, es decir, dada una función **f(x)**, encontrar otra **A** llamada **primitiva de f(x)** que dé aquélla por derivación.

Como la primitiva tiene relación con el área **A** debajo de la curva representativa de **f(x)**, y esta puede considerarse como suma de infinitos términos **dA** , podemos definir una operación llamada integración como el límite de una suma:

A = lim $_{Dx®0}$ S DA = ò dA = ò f(x).dx

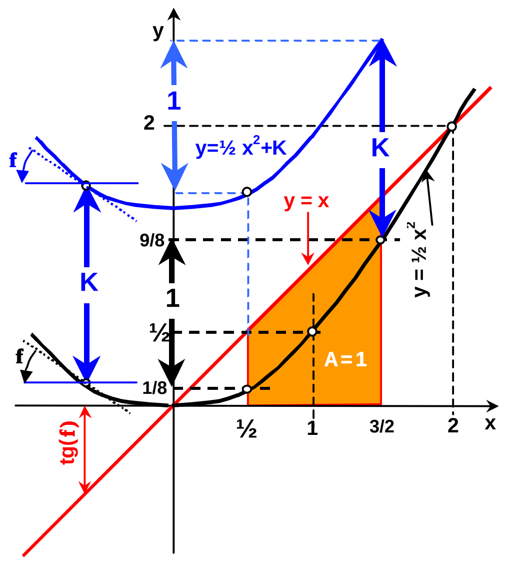
En caso de existir, el resultado de esa suma infinita se llama **integral indefinida de f(x)**. El adjetivo "indefinida" se justifica porque el resultado está determinado a menos de una constante aditiva, como veremos a continuación.

El problema tiene una solución inmediata si **f(x)** es alguna de las funciones que figuran en el segundo miembro de la tabla de derivadas que confeccionamos en su momento, es decir si tiene una primitiva "cantada". Por ejemplo si **f(x)=x**, es evidentemente **½x^2** su integral indefinida, y en este caso existe primitiva.

También es su primitiva la función **½x^2 + K**, siendo **K** una constante arbitraria, que al derivarse da un término igual a cero. De allí el término de "integral indefinida" aplicable al resultado de la operación **ò f(x).dx**

En cambio **f(x) = e$^{-(x^2)}$** no tiene una primitiva expresable como función conocida.

Sin embargo, el área debajo de la curva **e$^{-(x^2)}$** (la famosa campana de Gauss) , tiene una superficie bien definida y perfectamente calculable entre dos valores cualesquiera de **x**



Por ejemplo, en la figura se ven la función **y=x** y dos de sus primitivas posibles (**K=0** y **K=K**):

F(x) = òy.dx = òx.dx = ½ x^2 + K

De acuerdo a lo ya explicado, en este caso particular representa **F(x)** el área acumulada bajo la recta **y=x** en función del valor de la abscisa **x**. Al sumar una constante **K** de valor arbitrario a la primitiva básica **½ x^2** estamos generalizando el resultado de la integración a parábolas de igual forma que **½ x^2** desplazadas verticalmente en cualquier medida **K**, todas las cuales tienen la misma pendiente para iguales valores de **x** (véase en la figura los ángulos **f**).

Regla de Barrow

Supongamos que empezamos a contar el área acumulada arrancando desde un valor inferior **x_{inf}=½** hacia las **x** crecientes. Debajo de la recta va quedando la superficie coloreada, que es un trapezoide de base menor **y(x_{inf})=x_{inf}** , base mayor **y=x** y altura. **(x- x_{inf})**, o sea que el área en función de **x** es (base menor + base mayor)/2 por altura =

½ (x +x_{inf}).(x- x_{inf}) = ½ x^2 - ½ x_{inf}^2 = F(x) - F(x_{inf}) = F(x)+K - F(x_{inf})+K

Es decir que el área bajo la función encerrada entre dos abscisas es igual a la diferencia entre los valores que toman para esos puntos cualquiera de las primitivas posibles. (Como se ve, no importa el valor asignado a K). Esa operación se llama "**integral definida** de **f(x).dx = d F(x)** entre límites inferior **a** y superior **b**" y se simboliza escribiendo esos límites respectivamente como subíndice y superíndice en el signo de integral:

Reemplazando de acuerdo al dibujo **x_{inf}= ½** y **x_{sup}= 3/2**

resulta **A** = $\int_{1/2}^{3/2}$ **x dx = ½ x^2|$_{1/2}^{3/2}$ = 9/8 - 1/8 = 1**

Este procedimiento para calcular una integral definida entre dos límites, restando los valores que una primitiva toma en el límite superior y en el límite inferior, se conoce como “Regla de Barrow”

Isaac Barrow (1630-1677), teólogo y matemático, profesor de Isaac Newton, fué el primero en reconocer que la integración y la diferenciación eran operaciones inversas, a través de las relaciones entre áreas y tangentes.

Cálculo de integrales

La solución de problemas matemáticos no escapa a los procedimientos y reglas normales para resolver cualquier problema, a saber:

- Mirar atentamente la cuestión que se nos presenta para definir bien cuál es le problema.
- Observar si la el presente tiene que ver con problemas anteriores ya resueltos, y en ese caso tratar de adecuar las cosas para que se parezcan.
- Si es diferente de situaciones anteriores y la adecuación parece improbable, recién entonces pensar en nuevos métodos.
- Asimilar los nuevos resultados para aprovecharlos en el futuro.

Ejemplo 1

Cuando la expresión que está bajo el signo de integral coincide con alguna de las funciones de la derecha de la tabla de derivadas, la solución es inmediata, v.g.:

$\int 1/[1+x^2]\, dx = \int d\,[\text{arc tg}\,(x) = \text{arc tg}(x) + K$

Ejemplo 2

Hay que tratar de ver si en la cantidad subintegral se pueden individualizar funciones y diferenciales de esas funciones, por ejemplo en la integral $\int x/[1+x^2]\, dx$, que no está en tablas, se puede ver sin embargo que:

$x.dx = d\,(x^2/2) = ½\, d(x^2)$, y en el denominador hay una x^2, así que $\int x/[1+x^2]\, dx = ½ \int d(x^2)/(1+x^2)$. EL ½ se saca afuera del signo de integral, ya que es una constante. Sería lindo que en el denominador hubiera un x^2, ya que el cociente entre una diferencial de una expresión y esa misma expresión en el denominador es igual a la diferencial del logaritmo natural. Pero desgraciadamente hay un +1 que molesta..... Pero miremos un poco más, y esto es cuestión de oficio: la diferencial de algo más una constante no cambia, así que $dx^2 = d(1+x^2)$ ¡Ya está!

$\int x/[1+x^2]\, dx = ½ \int d(1+x^2)/(1+x^2) = ½ \ln(1+x^2) + K$, y si queremos podemos poner

$\int x/[1+x^2]\, dx = \ln \sqrt{(1+x^2)} + K$

Resumiendo: hay que ver si se puede armar una diferencial de algo que esté en el subintegral.

Ejemplo 3:

Calcular $\int tg(x).dx$.

Reemplazamos $tg(x)=sen(x)/cos(x)$, y entonces $\int sen(x)/cos(x)dx$, pero $sen(x).dx = d(-cos(x))$, de donde $\int sen(x)/cos(x)\, dx = -\int d(cos(x))/cos(x)\, dx =$

$-\ln(cos(x)) + K = \ln(sec(x)) + K$

Ejemplo 4

Calcular $\int sen^2(x)\, dx$

No sirve agrupar el subintegral así $sen^2(x).dx = sen(x)\, sen(x).dx = sen(x).[-dcos(x)]$, ya que la función y la diferencial no son de la misma función.

En cambio, conviene hacer el reemplazo de $sen^2(x)$ en función del coseno del arco doble:

$sen^2(x) = ½\,[1-cos(2x)]$, reemplazando en el subintegral y teniendo en cuenta que la integral de una suma es igual a la suma de las integrales, resulta:

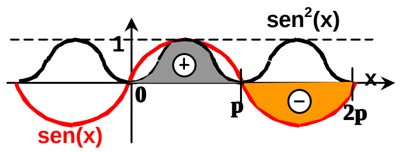
$\int ½\,[1-cos(2x)]\, dx = ½ \int dx - ½ \int cos(2x)\, dx$

La primer integral es evidentemente **½ x** . La segunda se resuelve reemplazando $dx = ½\, d(2x)$, con lo cual :

$\int cos(2x)\, dx = ½ \int cos(2x)\, d(2x) = ½\, sen\,(2x)$

Entonces resulta $\int sen^2(x)\, dx = ½[x-½\, sen\,(2x)] + K$

Vamos a completar este ejercicio calculando las áreas coloreadas en la figura.



Concepto de área orientada

El área debajo de sen^2x entre $x=0$ y $x=\pi$ está dada, como sabemos, por el valor de la integral definida:

$\int_0^{\pi} sen^2(x)\, dx = ½[\pi-½\, sen\,(2\pi)] - ½[0-½\, sen\,(0)] = \pi/2$

Calculemos ahora el área coloreada encerrada por la función **sen(x)** entre π y 2π. Ella resulta

$\int_{\pi}^{2\pi} sen\,(x)\, dx = -\cos(2\pi) - [-\cos(\pi)] = -1-1 = -2$

El área con signo es una consecuencia del proceso de integración. Es negativa cuando va quedando orientada hacia la izquierda de la curva, y es positiva cuando la curva deja al área encerrada a la derecha de ella. De tal manera, el área tiene en su signo un valor intrínseco, independiente del signo de la función y acorde con el sentido de circulación sobre la curva. (área orientada)

Otros métodos de integración

Sustitución trigonométrica

Sea la integral $\int \sqrt{(a-x^2)}\, dx$. Para resolverla observemos que la operación sólo será posible para valores reales de la subintegral, es decir para $x \le \sqrt{a} = a^{1/2}$.

Un reemplazo que cumple con tal condición es:

$x = a^{1/2}\, sen(t)$, de donde $dx = a^{1/2} cos(t)\, dt$, con lo que la integral queda:

$\int \sqrt{a-x^2}\, dx = \int a^{1/2} (1-sen^2(t))^{1/2}\, a^{1/2}.cos(t)\, .dt =$

$= a \int cos\,(t).cos(t)\, .dt = a\int cos^2(t).d\,t$

Esta integral se resuelve como la anterior, expresando **$cos^2(t)$** en función del arco doble:

$cos^2(t) = ½\, [1+cos\,(2t)]$, con lo cual es:

$\int cos^2(t).d\,t = ½\, t + ½\int cos\,(2t)].dt$

El segundo término tiene la integral **$\int cos\,(2x)].dt$**, que se resuelve en **$½\int cos\,(2t)].d(2t) = ½\, sen\,(2t)$** , por lo tanto es **$\int cos^2(t).d\,t = ½\, t + 1/4\, sen\,(2t) + K$** y así:

$\int \sqrt{a-x^2}\, dx = a\int cos^2(t).d\,t = ½\, a\, t + a/4\, sen\,(2t) + K$

Pero **$sen(2t)=2.sen(t).[1-sen^2(t)]^{½} = 2x/a^{½} \sqrt{1-x^2/a} =$**

$2x/a^{½} \sqrt{(a-x^2)/a} = 2x/a \sqrt{a-x^2}$

y como además es **$t = arc\ sen\ (x/a^{½})$** resulta por fin **$\int \sqrt{a-x^2}\, dx = a/2.arc\ sen\,(x/a^{½}) + x/2\, \sqrt{a-x^2})\} + K$**

Integración por partes

De acuerdo a lo visto, la diferencial de un producto es

$d(u.v) = u.dv + v.du$,

de donde **$u.dv = d(u.v) - v.du$**,

e integrando ambos miembros es:

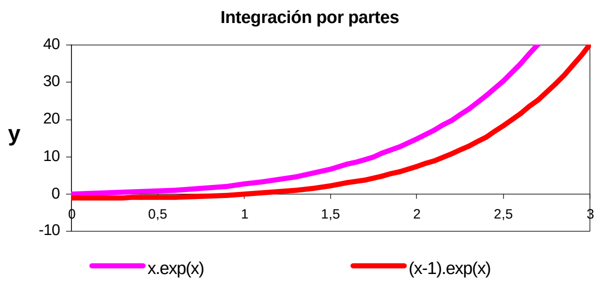
$\int u.dv = \int d(u.v) - \int v.du = uv - \int v.du$

Lo anterior puede aprovecharse cuando una expresión subintegral pueda descomponerse en un producto de una función por una diferencial de otra función.

Por ejemplo: para resolver la integral **$\int e^x.x\, dx$** advertimos que **$e^x dx = de^x$** y ponemos **$u=x$,$dv=de^x$, $v=e^x$** , con lo cual es:

$\int u.dv = uv - \int v.du = x.e^x - \int e^x\, dx = x.e^x - e^x + K =$

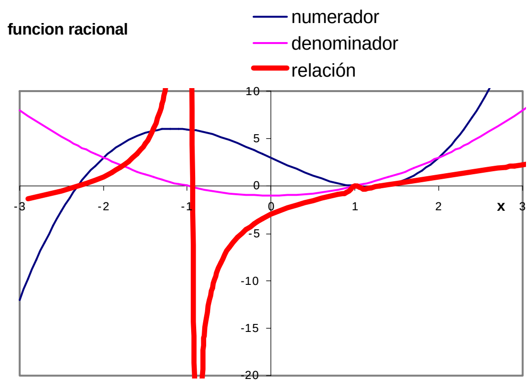
$= e^x(x-1) + K$



En el gráfico se ven la función y su primitiva para K=0

Integración de funciones racionales.

<u>Desarrollo de un ejemplo señalando el principio de la integración numérica</u>.



Cuando el subintegral es un cociente de polinomios, se debe hacer en general la división algebraica si el grado del numerador es mayor que el denominador. En caso contrario, se debe descomponer el cociente en suma de fracciones simples.

<u>Ejemplo 1</u>:Calcular la integral indefinida

$\int [x^3-4x+3] / [x^2-1]\, dx$

Se pueden ver en el gráfico las curvas representativas del numerador, denominador y la función. Ésta tiende a **$\to +\infty$** viniendo desde la izquierda hacia **$x\to -1$** , y a **$\to -\infty$** yendo desde la derecha hacia la misma abscisa, que es donde se anula el denominador. En **x=-1** presenta así una asíntota vertical. Numerador y denominador se anulan simultáneamente para **x=1**, y el límite de la función para ese valor de **x** es **- ½** (compruébese la indeterminación tipo **0/0** y resuélvase por ejemplo con la regla de L'Hôpital). Aproximadamente, para **x=1,303** y **x=-2,302** se anula sólo el numerador, resultando nula la función cociente para esas abscisas

Como una raíz del numerador es **x=1** , y el denominador se puede descomponer en el producto **(x-1).(x+1)**, resulta:

$[x^3-4x+3] / [x^2+1] = [x^3-4x+3] / [(x-1).(x+1)] =$

$[x^2 + x - 3] / [x +1] = x - 3 + [3x / (x+1)]$

y haciendo la suma de integrales queda:

$\int [x^3-4x+3] / [x^2-1].dx = ½\, x^2 - 3x + 3\int x/(x+1)dx$, pero **$x/(x+1) = 1- 1/(x+1)$**,

y entonces

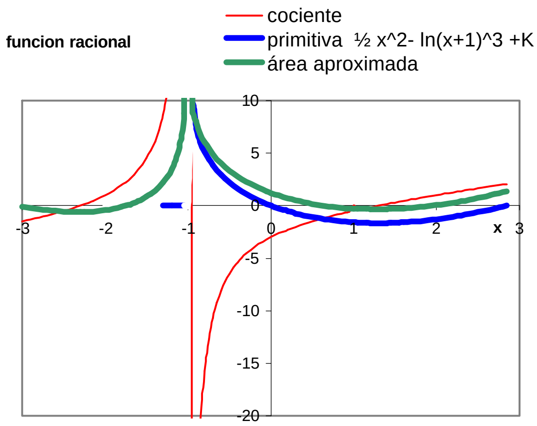
$\int x/(x+1)dx = x - \int dx/(x+1) = x - ln(x+1) + K$.

Por fin podemos poner que:**$\int [x^3-4x+3] / [x^2-1]\, dx =$**

$= ½\, x^2 - 3\, ln(x+1) + K = ½\, x^2 - ln[(x+1)^3] + K$

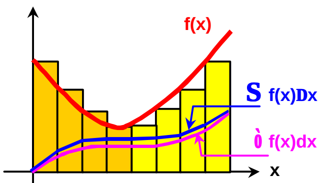
En el gráfico se representa nuevamente la función racional **f(x)** junto con la primitiva **$F(x)=½x^2-3.ln(x+1)+K$**

para **K= 0** y el área aproximada bajo la curva. La primitiva está definida sólo para **x>=-1**, por lo que se representa en este intervalo.



En cambio, el **área** bajo la curva de la función cociente **f(x)**, ha sido evaluada numéricamente en base a una planilla de cálculo, como suma aproximada de áreas de pequeños rectángulos de base $\Delta x=0,05$ y altura **f(x)**, es decir **área aproximada =** $\Sigma f(x_i).\Delta x$.

El área aproximada está definida aún para valores menores que **x=-1**, y a partir de **x>(-1)** se ha tratado de superponerla a la primitiva. Este ajuste no se logra del todo debido al intervalo finito Δx, al dar $\Sigma f(x_i).\Delta x$ valores por exceso sobre la integral $\int f(x_i).dx$, cuando **f(x)** es decreciente en valor absoluto, y valores por defecto cuando **f(x)** es creciente en valor absoluto. En la figura se ve cómo tienden a compensarse tales efectos en intervalos que incluyan crecimiento y decrecimiento.



Ajuste por exceso y por defecto

Ejemplo 2

Calcular la integral indefinida $\int [x^2-1] / [x^3-4x+3]\ dx$

Como se ve, se trata de la recíproca de la función anterior. Debe aplicarse aquí un método basado en la descomposición en fracciones más simples. Para ello se debe descomponer en factores al polinomio denominador y por ende es menester conocer sus raíces.

Se **demuestra** en álgebra que el **polinomio reducido** de grado **n** (reducido quiere decir con un coeficiente unitario para el término de mayor exponente, o sea x^n), que como se sabe posee **n** raíces reales o imaginarias $x_1, x_2, x_3... x_n$ es **único**. Como consecuencia de esa condición de único (unicidad) el mismo se puede escribir como $(x-x_1).(x-x_2)...(x-x_n)$ ya que ese producto da un polinomio de grado **n**, con coeficiente unitario para x^n, que se anula para $x=x_1, x=x_2...x=x_n$, o sea que tiene a $x_1, x_2, ...x_n$ como raíces. De la comparación entre el desarrollo del producto y la forma $x^n+a_{n-1}.x^{n-1}+a_{n-2}.x^{n-2}+...a_0$ surgen importantes relaciones entre los coeficientes y las raíces, que el estudiante hará bien en repasar.

Mediante algún método se obtienen las raíces que satisfacen a la ecuación $x^3-4x+3 = 0$, por ejemplo, aplicando la fórmula de Cardano, ya mencionada antes.

Así resultan:

$x_1= 1$

$x_2= - ½ - ½ [13]^{½}$

$x_3= ½- ½ [13]^{½}$

Como x_2 y x_3 son números largos de escribir, las seguiremos representando como x_2 y x_3, aunque ya sepamos su valor.

Por lo visto antes, el polinomio x^3-4x+3 , con raíces $x_1, x_2\ x_3$, puede escribirse en función de tales raíces como $x^3-4x+3 = (x-1).(x-x_2).(x-x_3)$, ya que ambas expresiones son polinomios de igual grado (3º) que se anulan para los mismos valores (x_1, x_2, x_3) y con el coeficiente de mayor grado igual a la unidad. De tal manera podemos poner:

$$[x^2-1] / [x^3-4x+3] = [(x-1)(x+1)] / [(x-1).(x-x_2).(x-x_3)] =$$

$$=(x-1) / [(x-x_1).(x-x_2)] = A/(x-x_1) + B/(x-x_2)$$

Se obtienen los coeficientes **A** y **B** desarrollando la expresión $A/(x-x_1) + B/(x-x_2)$ e igualando su numerador con **(x-1)** (ya que el denominador es igual a $[(x-x_1).(x-x_2)]$). Entonces es $(A+B).x-(A.x_2+B.x_1)=(x-1)$, de donde $(A+B)=1$ y $A.x_2 + B.x_1 = 1$

y por fin resulta $A = (1-x_1)/(x_2-x_1)$ y $B = (x_2-1)/(x_2-x_1)$

Con estos valores de los coeficientes **A** y **B** podemos calcular la integral:

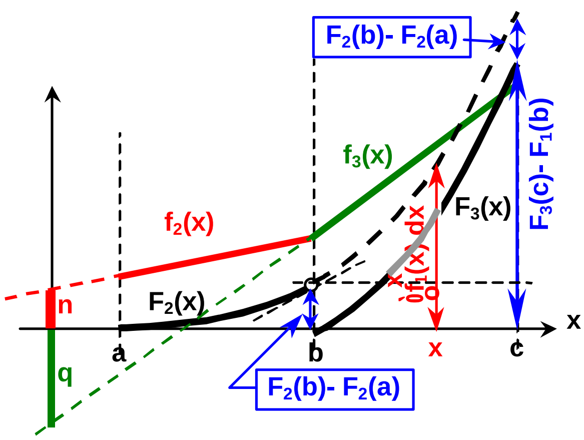
$$\int [x^2-1] / [x^3-4x+3]\ dx = \int [A/(x-x_1) + B/(x-x_2)]\ dx =$$

$$= A \ln(x-x_1) + B \ln(x-x_2) + K$$

Integrales definidas de funciones con discontinuidades

Para calcular el área debajo de curvas en intervalos en que presenten quiebres e incluso discontinuidades o saltos, se debe proceder por tramos, pudiéndose poner para el caso de la figura:

$$\int_a^c f_1(x).dx = \int_a^b f_2(x).dx + \int_b^c f_3(x).dx$$



Las dos rectas del gráfico tienen las ecuaciones:

$\mathbf{f_2(x) = m\,x + n}$, definida para $\mathbf{a \le x \le b}$

$\mathbf{f_3(x) = p\,x + q}$, definida para $\mathbf{b \le x \le c}$

con $\mathbf{m = [f_2(b)-f_2(a)]/(b-a)}$ y $\mathbf{p = [f_2(b)-q]/b}$

resultando así que:

$\mathbf{f_3(b) = p\,b + q = [f_2(b)-q] + q = f_2(b)}$

La función completa $\mathbf{f_1(x)}$, formada por los dos segmentos de recta con un quiebre en **x=b** se define de la siguiente manera:

$\mathbf{f_1(x) = f_2(x) = m\,x + n}$, definida para $\mathbf{a \le x \le b}$

$\mathbf{f_1(x) = f_3(x) = p\,x + q}$, definida para $\mathbf{b \le x \le c}$

Siendo las respectivas integrales indefinidas de $\mathbf{f_2(x)}$ y $\mathbf{f_3(x)}$ las primitivas:

$$\int f_2(x).dx = F_2(x) = ½\ m.x^2 + n.x + K_2$$

$$\int f_3(x).dx = F_3(x) = ½\ p.x^2 + q.x + K_3$$

resulta entonces

$$\int_a^b f_2(x)\,dx = F_2(b) - F_2(a) = ½\ m.(b^2-a^2) + n.(b-a)$$

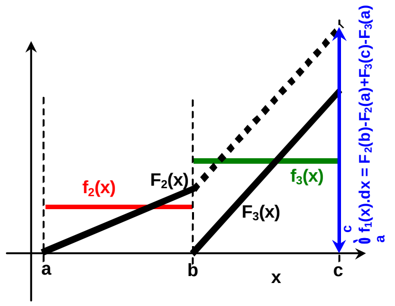
$$\int_b^c f_3(x)\,dx = F_3(b) - F_3(a) = ½\ p.(c^2-b^2) + q.(c-b)$$

$$\int_a^c f_1(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_b^c f_1(x)\,dx =$$

$$= F_2(b) - F_2(a) + F_3(b) - F_3(a)$$

Nótese que la función $\mathbf{f_1(x)}$ presenta un quiebre en **x=b**, pero su integral en cambio tiene igual pendiente a ambos lados de dicho punto, ya que $\mathbf{f_3(b) = f_2(b)}$

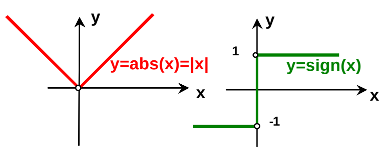
En la figura siguiente se puede observar la integral definida de una función escalonada. Ella presenta sólo un quiebre en la abscisa en que la función de la que es integral (es decir su derivada) tiene un escalón.



Como se puede apreciar, la integración es una operación que suaviza las funciones, así como la derivación las hace más ásperas. (Considérese en efecto, que f(x) es la derivada de F(x))

Volvamos sobre nuestras conocidas funciones

abs(x) y **sign(x)**



En base a lo visto sobre las integrales de funciones discontinuas, se advierte que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\int \mathrm{sign}(x).dx = \mathrm{abs}(x) + K$$

por lo que podemos agregar a la tabla de derivadas la siguiente: **D abs(x)+K = sign (x)**

Funciones impulsivas y distribuciones

¿Habrá funciones cuya integral sea una función escalonada?. Parecería en principio imposible, porque tal función debería ser la derivada de un escalón vertical, que cuando es ascendente tiene una pendiente de +∞ y si es descendente baja con una pendiente negativa de -∞.

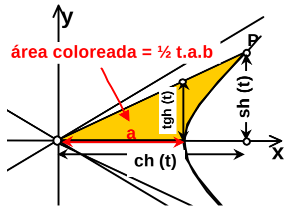
Sin embargo, como en física se necesitaba contar con algún tipo de ente cuya integral fuera una función escalonada, se inventaron las funciones impulsivas, cuya manifestación física más importante son las fuerzas concentradas en un punto.

Los ingenieros están muy acostumbrados a pensar en fuerzas concentradas como el límite de una fuerza distribuída en una superficie (presión) cuando ésta tiende a cero. Las ruedas de los vehículos sobre el suelo, el taco de una zapato de mujer en el piso o el tiro de un cable amarrado a un poste se representan en la práctica como fuerzas concentradas.

La integral de las fuerzas a lo largo de la pieza sobre la que están aplicadas dan el esfuerzo de corte que se ejerce sobre el material. Si las fuerzas son concentradas el esfuerzo de corte es escalonado, como se explica en los tratados de estática y resistencia de materiales.

Aplicaciones geométricas de las integrales

Cálculo de áreas y volúmenes



Ejemplo 1. En la página 12 prometimos probar que el área coloreada de la figura vale **½ t.a.b**.

Lo prometido es deuda:

La hipérbola tiene la ecuación $\mathbf{(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1}$ en la que **x=a.ch(t)** e **y=b.sh(t)**

El área coloreada es igual a la diferencia entre la superficie del triángulo de base **x** y altura **y**, o sea **½ x.y** menos el área bajo la curva desde **x=a** hasta **x=x,** o sea $\int_a^x y(x).dx$.

Calculemos esta última: Para resolver la integral indefinida $\int$**y.dx** hagamos la sustitución obligada **x=a.ch(t)**, **y=b.sh(t)**, **dx=a.sh(t).dt** , y la integral queda: $\int$**y.dx =** $\mathbf{a.b\int sh^2(t)dt}$

Ahora bien, dado que $\mathbf{sh(t) = ½\ (e^t-e^{-t})}$ resulta que

$\mathbf{sh^2(t) = ¼\ (e^{2t}-2+e^{-2t}) = ½\ (ch(2t) - 1)}$ de donde $\mathbf{\int sh^2(t)dt = ½ \int (ch(2t)dt - t) = ¼\, sh(2t) - ½\, t}$

Entonces es $\mathbf{\int y(x).dx = a.b\ [¼\ sh(2t) - ½\ t]}$

Cuando hacemos el cambio de variable también se modifican los límites: para **x=a** es **ch(t)=1** de donde **t=arg ch(1)** y por lo tanto **t=0**. Para **x=x** es **ch(t)=x/a** de donde **t=arg ch(x/a).** Así pués es que:

$$\int_a^x y(x).dx = \int_0^t f(t).dt = ½\ a.b\ [½\ sh(2t) -\ t]$$

Por otra parte, el área del triángulo del cuál debe deducirse el área bajo la hipérbola es:

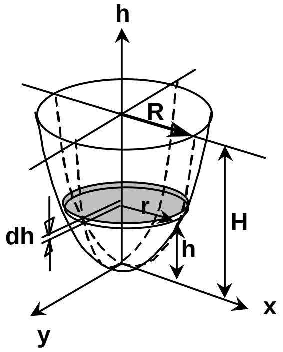
A = ½ x.y = ½ a.b.sh(t).ch(t)

pero como **sh(t).ch(t) = ½ sh(2t)** (demuéstrese), es **A = ¼ a.b sh(2t)** y reemplazando en la integral definida entre **0** y **t** ésta vale

$$\int_a^x y(x).dx = \int_0^t f(t).dt = A - ½\, a.b\, t$$

Así entonces el área coloreada resulta **½ a.b.t**, como se había afirmado antes.

<u>Ejemplo 2</u> : Calcular el volumen del vaso representado en la figura, limitado por un paraboloide:



El radio **r** en función de la altura **h** está dado por la ecuación de la parábola

$r = \sqrt{h/a}$ $\qquad$ $R = \sqrt{H/a}$

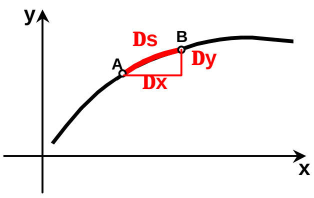
Se toma como elemento diferencial de volumen un cilindro diferencial de base **πr^2** y altura **dh**, es decir **$dV = \pi.r^2.dh = \pi/a^2.h.dh$** y se integra en altura, desde **h = 0** hasta **h = H** , resultando:

$$V = \int_0^H dV = \pi/a^2 \int_0^H h.dh = \pi/2\,(H/a)^2 = ½\, \pi\, R^2\, H$$

Compárese el resultado con el del volumen del cono de igual base y altura, que como se sabe vale $1/3\ \pi.R^2.H$

Cálculo de longitud de curvas

En la figura se representa una función de la que se señala una pequeña porción o arco de curva **Δs** entre dos puntos próximos **A** y **B**. En la medida que **A** y **B** se acerquen , los incrementos pasarán a ser diferenciales, y se tendrá para el diferencial de arco **ds** que **$ds^2=dx^2+dy^2$** , de donde **$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$** , y dividiendo ambos miembros por **dx**, se llega a la expresión:



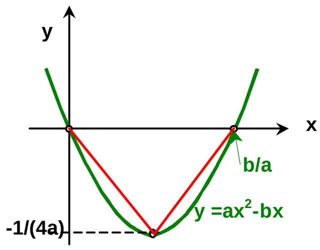
$ds/dx = \sqrt{1+(dy/dx)^2}$, que nos da derivada de la longitud de la curva en función de la derivada de la función.

Con ella podemos calcular la longitud de una curva de función **y(x)** conocida entre dos puntos de abscisas **x_1** y **x_2** a través de la integral: $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(dy/dx)^2}.dx$

<u>Ejemplo 4:</u>

Calcular la longitud del arco de parábola de la figura, cuya ecuación es:

$y=ax^2-bx$, entre **x=0** y **x=b/a**



La diferencial de arco vale **$ds = [1+y'_x{}^2]^{½}\ dx =$**

$\sqrt{1+(2ax-b)^2}.dx$

Hacemos el reemplazo **(2ax-b) = u** de donde

$\sqrt{1+(2ax-b)^2}.dx = 1/(2a)\sqrt{1+u^2}.du$

Vemos que **u** puede tomar cualquier valor, desde **$-\infty$** a **$+\infty$**, así que la reemplazamos por **u=sh(t)**, que cumple también con esta condición, y que nos transforma el radical **$\sqrt{1+u^2} = \sqrt{1+sh^2t} = ch(t)$** , siendo además **du=ch(t).dt**

Entonces **$\sqrt{1+(2ax-b)^2}.dx = 1/(2a).ch^2(t).dt$**

Siempre que se tiene una integral de un seno o coseno circular o hiperbólico elevado al cuadrado, se debe reemplazar en función de la misma función del arco doble. En nuestro caso: **$ch^2(t)=$ ½ (ch(2t)+1)**, con lo que es: **$1/(2a).ch^2(t).dt =$ ¼ 1/a (ch(2t)+1). ½ d(2t)**

Entonces **$\int\sqrt{1+(2ax-b)^2}.dx = 1/8/a \int(ch(2t)+1).\ d(2t) =$**

= F(t) = 1/8/a [sh(2t)+2t] + K

Ahora bien: cuando **x=1** es **u=-b** y **t= arg sh(-b)**. Este número es el límite inferior de la integral definida.

Cuando **x=-b/a** es **u=b** y **t = arg sh(b) = -arg sh(-b)** . Este número es el límite superior de la integral, que es igual al límite inferior cambiado de signo.

Por ejemplo, si **a=b=1** será

límite inferior **t_{inf} = arg sh(-1) = - 0,8813** (de tablas)

límite superior **t_{sup} = arg sh(1) = +0,8813** (de tablas)

$F(t_{sup})$=1/8 [sh(2.0,8813)+2.0,8813] =

= 1/8 (2,828+1,7626) = 0,5738

$F(t_{inf})$=1/8/a [sh(-2.0,8813)-2.0,8813] =

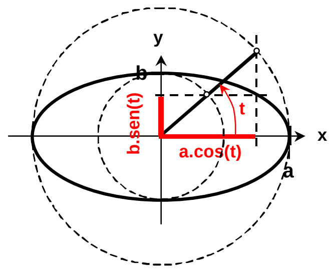
= 1/8 (-2,828-1,7626) = - 0,5738

La longitud del arco de parábola será entonces, de acuerdo a la regla de Barrow:

$F(t_{sup})$ - $F(t_{inf})$ = 0,5738 -(-0,5738) = 1.1474

Esta longitud debe ser mayor que la poligonal marcada en rojo, cuyo valor para **a=b=1** es **1,1180**

<u>Ejemplo 5:</u> Calcular la longitud de un elipse de semiejes **a** y **b**, cuya ecuación es, como se sabe:



$x^2/a^2 + y^2/b^2 =1$

Haciendo el reemplazo con las ecuaciones paramétricas de la elipse que son:

x = a. cos(t) , $\qquad$ **y =b sen(t),** se tiene

dx = -a. sen(t).dt , $\qquad$ **dy =b.cos(t).dt,** y como

$ds^2 = dx^2+dy^2 = [a^2.\ sen^2(t)+b^2.\ cos^2(t)].[dt]^2$

y la longitud de la elipse será

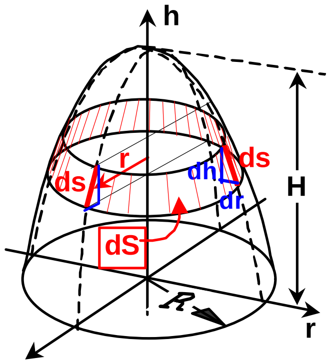
$$\int_0^t \sqrt{[a^2.\ sen^2(t)+b^2.\ cos^2(t)]}.dt$$

Este tipo de integral no tiene una solución sencilla, como combinación de funciones elementales. Sin embargo, la función existe, como que también es mensurable la longitud de un arco de elipse. Se la conoce como “función elíptica”, y puede calcularse numéricamente.

Para a = b = R , que es el caso de una circunferencia de radio R, la integral anterior da para la longitud de arco en función del ángulo t, el resultado conocido por todos, a saber $R \int_0^t dt = R.t$

Cálculo de áreas de revolución

Cada diferencial de arco **ds** de una curva que gira alrededor de un eje de rotación a una distancia **r** barre un área diferencial de superficie **dS = 2.π.r.ds** , que es el área lateral de uno de los troncos de cono diferenciales de altura **dh** en que se puede considerar descompuesta la superficie de revolución.



<u>Cuestión:</u> ¿Por qué no se considera, como en el caso del diferencial de volumen, un cilindro diferencial en vez de un tronco de cono?

Porque la diferencia entre el volumen de un cilindro y un tronco de cono diferenciales es un diferencial de segundo orden, $d^2V = \pi.r.dh.dr$ (demuéstrese). En cambio, la diferencia de superficies diferenciales entre tronco de cono y cilindro vale $dS = 2.\pi.r.(ds-dh)$, que es un diferencial del mismo orden que el de cada uno de los términos, y por lo tanto no puede despreciarse como en el caso del volumen.

En la cúpula parabólica de la figura, se tiene

$$h = H - H/R^2.r^2 = H\,[1-(r/R)^2]$$

$$dh/dr = -2.H.r/R^2 \qquad ds = \sqrt{1+4H^2/R^4.r^2}.dr$$

y entonces $dS = 2.\pi.\sqrt{1+4H^2/R^4.r^2}.r.dr$, y poniendo $u=1+4H^2/R^4.r^2$ es $du = 8H^2/R^4.r.dr$ de donde

$dS = 2.\pi.R^4/8H^2 \sqrt{u}\, du$, cuya primitiva es

$$F(u) = 2.\pi.R^4/8/H^2.(\,2/3\ u^{3/2}) = \pi.R^4/6/H^2.\ u^{3/2}$$

Ahora bien, es más cómodo seguir trabajando con la variable **u**, cambiando los límites de integración:

Cuando **r=0** es **u=1**; cuando **r=R** es $u=1+4H^2/R^2$

La superficie de la cúpula resulta entonces:

$$\int_0^R dS = F(1+4H^2/R^2) - F(1) =$$

$$= \pi.R^4/6/H^2\ [\,(1+4H^2/R^2)^{3/2} - 1]$$

Para **R=H** es $S = \pi.R^2/6.(5^{3/2}-1) = 1{,}697.\pi.R^2$

Comparando la superficie de esta cúpula parabólica con la del cono ($S_{cono} = \pi.R.(H^2+R^2)^{½}$: compruébese), se ve que para R=H ésta vale $\sqrt{2}.\pi.R^2$, es decir el 83% de aquélla.

Aplicaciones físicas de las integrales

Trabajo de una fuerza

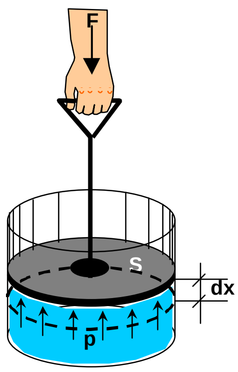
Se aprende en física que el trabajo que efectúa una fuerza de intensidad **F** a lo largo de un camino de longitud **s**, está dado por el producto de su proyección sobre la dirección de la trayectoria F_s y la longitud **s** de ésta.

Si la proyección de la intensidad F_s se mantiene constante a lo largo del camino de longitud **s** , el trabajo vale $T=F_s.s$

Cuando varía la dirección de la fuerza con respecto al camino seguido, o cambia la intensidad de la fuerza a lo largo de la trayectoria, u ocurren ambas cosas a la vez, no puede definirse el trabajo como un producto de magnitudes cambiantes punto a punto. En cambio se puede definir al mismo como una integral de trabajos diferenciales **dT** que valen $F_s.ds$

Así entonces es en general $T = \int_0^S F_s.ds$

Ejemplo: Trabajo de compresión de un gas



Una masa **M** de gas encerrada en un cilindro a la temperatura **T** se comprime desde un volumen V_1 a otro menor V_2. ¿Qué energía es necesaria para realizar esta evolución?

Aplicaremos la ley de los gases perfectos, **p.V = M.R.T**, que dice que el producto de la presión por el volumen es proporcional a la masa y a la temperatura absoluta. La constante **R** es propia de la naturaleza del gas en cuestión.

De acuerdo a lo visto el diferencial de trabajo **dT** ejercido por la fuerza **F** para un desplazamiento diferencial del pistón **dx** en el mismo sentido que aquélla, vale **dT** = **F.dx** . Ahora bien, la fuerza **F** está equilibrada por la presión **p** que el gas ejerce sobre la superficie **S** del pistón, de tal manera que **F=p.S**. Así entonces resulta que el diferencial de trabajo es **dT** = **F.dx = p.S.dx**, pero **S.dx** no es otra cosa que la variación diferencial de volumen **dV** que experimenta la masa de gas, así que podemos poner **dT** = **p.dV**

Según la ecuación de los gases es **p = M.R.T/V**, y entonces **p.dV = (M.R.T) dV/V**

Si la evolución del gas se realiza a temperatura constante (isotérmica), también lo será **MRT**, y así resulta:

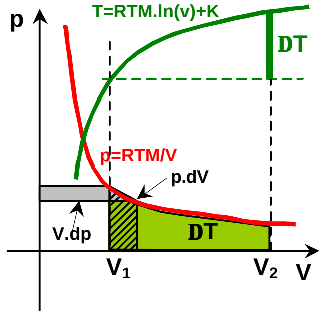
dT = p.dV = (M.R.T) d(ln V) de donde, integrando

T = f(V) = MRT ln(V) + K

La energía que es necesario entregar a la masa de gas para llevarla desde V_1 a V_2 resulta entonces

$$\int_{V_1}^{V_2} dT = f(V_2) - f(V_1) = MRT\ ln(V_2/V_1)$$

El hecho que el cálculo anterior arroje una cantidad negativa en una compresión (ya que $V_2/V_1 < 1$) significa que las fuerzas exteriores realizan trabajo contra el sistema gaseoso. Un resultado positivo corresponde a energía entregada por el sistema gaseoso al medio exterior, cosa que ocurre en la expansión. En la figura se ve la representación de la evolución isotérmica, que es una hipérbola equilátera



p=RTM/V y de su integral **T=RTM.ln(V)+K** La diferencia de ordenadas **DT** representa en la escala correspondiente al área debajo de la curva, cuyo valor es el trabajo de expansión o compresión, según sea el sentido de la evolución.

Diferenciando la ecuación de estado de los gases **p.V=RTM** resulta **d(pV) = p.dV+V.dp** = **RM.dT** En una evolución isotérmica es **dT=0** y entonces **V.dp=p.dV.** Las áreas sombreadas (iguales) corresponden a los trabajos elementales : **pdV** es el diferencial de trabajo de compresión o expansión, y **Vdp** es el diferencial de trabajo de circulación, que según se estudia en termología es el necesario para llenar y expulsar los gases del cilindro en el caso bombear entre recipientes a presiones **p** y **p+dp**

Momentos

En mecánica de partículas se usa el concepto de **momento de orden j** de un sistema de **n** partículas materiales de masa concentrada $\mathbf{m_i}$ con respecto a un punto como :

$$M_n = \Sigma_{1=1,2,..n}\, m_i.d_i^{\,j} = m_1.d_1+m_2.d_2+m_3.d_3+ \ldots .+m_n.d_n,$$

siendo $\mathbf{d_i}$ la distancia vectorial (que tiene módulo y dirección) entre la partícula de masa $\mathbf{m_i}$ (escalar) y el punto considerado, que se toma como centro de momentos.

En particular, el momento de primer orden $\mathbf{M_1}$ se anula cuando se toma como centro un punto llamado “centro de gravedad, centro de masas o **baricentro** del sistema de partículas”.

El momento de segundo orden $\mathbf{M_2}$ se llama también **momento de inercia**, porque interviene en la energía de rotación del sistema. Tomado con respecto al centro de gravedad (momento de inercia baricéntrico) es una medida de la dispersión de las partículas alrededor de ese punto.

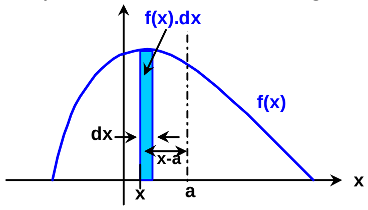
El momento de tercer orden $\mathbf{M_3}$ tomado siempre con respecto al centro de masas, mide la asimetría de la distribución.

Cuando la medida de las longitudes se realiza en una dimensión, las distancias pueden ser positivas o negativas, y en tal caso los momentos de orden par son siempre positivos, mientras que los de orden impar pueden tener los dos signos.

Generalizando el concepto de momento a un sistema de elementos cualesquiera, se habla de momentos aplicados a funciones, superficies, fuerzas, etc. En el caso de magnitudes vectoriales como las fuerzas, el momento es también un vector, definido por lo que se conoce como “producto vectorial”. Recuerde el lector esos conceptos que estudió seguramente en los capítulos de mecánica.

El concepto de momento se extiende de elementos concentrados a elementos distribuídos gracias al cálculo integral, reemplazándose la sumatoria discreta por la integral continua.

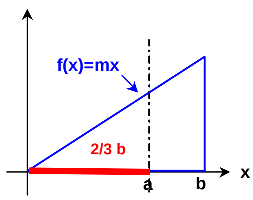
Por ejemplo, se define como momento de orden **n** de una superficie definida por una función **f(x)** y el eje **x**, con respecto a un eje perpendicular a aquél que pasa por la abscisa **a**, a la integral $\int f(x)(x-a)^n dx$



Los momentos de funciones con respecto a ejes son muy usados en estadística. Los momentos de segundo orden o de inercia de superficies con respecto a ejes son particularmente importantes en mecánica y en resistencia de materiales (ver capítulos correspondientes en los libros de física).

<u>Ejemplo 1</u>: Calcular el eje vertical de gravedad para un triángulo rectángulo apoyado sobre un cateto.

El momento de primer orden con respecto al eje **x=a** vale:



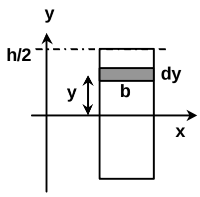
$$M_{1a} = \int_0^b m.x.(x-a)dx.=$$

$$= m\,(1/3.b^3 - 1/2\, a.b^2)$$

Para $\mathbf{M_{1a}=0}$ debe ser **a = 2/3.b** El eje de gravedad de un triángulo rectángulo está pués a 2/3 de la longitud del cateto sobre el que apoya, contando desde el ángulo agudo.

<u>Ejemplo 2</u> : Calcular el momento de inercia de un rectángulo de base **b** y altura **h** con respecto al eje baricéntrico paralelo a la base.

Hay que tomar siempre como elemento de superficie el rectángulo cuyo lado diferencial sea de la misma coordenada que la distancia, en el caso de la figura **b.dy**



Así entonces $M_{2x} = \int_{-h/2}^{+h/2} b.y^2.dy =$
$= \int_0^{+h/2} b.y^2.dy + \int_{-h/2}^{0} b.y^2.dy =$
$\int_0^{+h/2} b.y^2.dy + \int_0^{+h/2} b.y^2.dy=$

$$2\int_0^{+h/2} b.y^2.dy = 1/12.bh^3$$

-o-o-o-

ÍNDICE TEMÁTICO