MATRICES, DETERMINANTES, VECTORES Y TENSORES

Estos cuatro elementos son herramientas fundamentales para manejarse cómodamente en física y en matemática.

Matrices

Son cuadros que agrupan cantidades o funciones. Se caracterizan por el número de filas y de columnas que conforman el cuadro. Pueden ser cuadradas (mismo número de filas que columnas) o rectangulares (diferente número de filas y columnas)

Los elementos que componen las matrices pueden tener la más variada forma y significación. Pueden ser números de cualquier tipo, funciones reales o complejas, sucesiones, series, etc. Pueden significar precios, cantidades, coeficientes, etc.

Si bien las matrices llevan el significado intrínseco de los elementos que las componen, poseen también características propias inherentes a su forma y configuración, por ejemplo el hecho de ser cuadradas o rectangulares, simétricas o no, de poseer diagonales o filas de elementos nulos o unitarios, etc. Estas características de disposición o forma agregan importante información de conjunto.

Veamos algunos ejemplos de matrices muy comunes en nuestra vida diaria:

Cuadro tarifario de transporte.

Las empresas de transporte de pasajeros indican el precio del viaje en función del origen y destino con una tablas o "cuadros tarifarios":

COSTO DEL BOLETO ($) ENTRE CIUDADES

Origen® Destino¯	Buenos Aires	Chascomús	Dolores
Bs. As.	0	13	17
Chascomús	15	0	13
Dolores	20	15	0

En los cuadros tarifarios la diagonal principal posee siempre elementos nulos (el costo por no moverse del lugar es cero). En general son matrices simétricas con respecto a la diagonal principal. El hecho que, atípicamente no lo fueran, como en el ejemplo, revela que se contemplan precios distintos de ida y vuelta (por ejemplo para favorecer el turismo en temporada).

Distancias entre ciudades por ruta

Son conocidas en los mapas de rutas unos cuadros que indican distancias entre ciudades. A continuación damos uno muy simple a modo de ejemplo:

DISTANCIA (Km) ENTRE CIUDADES

	Bs.As.	Rosario	Córdoba	Tucumán
Bs.As.	0	350	740	950
Rosario	350	0	290	600
Córdoba	740	290	0	210
Tucumán	950	600	210	0

La diagonal principal es lógicamente nula. Si como ocurre casi siempre, se va y se vuelve por el mismo camino, la matriz será simétrica. En el caso poco frecuente de circuitos de una sola mano, la matriz puede ser asimétrica.

Matriz insumo/producto

Los economistas siempre soñaron con poseer una matriz que contuviera todos las relaciones entre el costo de los insumos y el costo de cada producto considerando todos los bienes y servicios del país.

RELACIÓN INSUMO/PRODUCTO AL 1/1/2000

Insumo ® Producto ¯	Trigo	energ. eléctr.	gas	mineral de hierro	m.de obra
palanquilla de hierro	0	0,1	0,4	0,3	0,2
pan blanco	0,2	0,4	0,3	0	0,1
petróleo (crudo)	0	0.6	0,1	0	0,3

La tabla anterior (muy simplificada), muestra una porción de la enorme matriz que se forma con todos los productos y sus correspondientes insumos. Los elementos de la matriz insumo/producto son coeficientes de influencia que miden en qué proporción interviene el costo de cada insumo en cada producto. La suma de cada fila debe dar 1 (¿por qué?). En cambio no son sumables los coeficientes por columnas (¿por qué?). La matriz insumo producto no es en general una matriz cuadrada, ya que de ordinario hay muchos más insumos que productos.

Sigamos ahora estudiando otras matrices, para ver luego cómo podemos trabajar con ellas.

Sistemas de ecuaciones lineales. Matrices y determinantes.

Sea un sistema de ecuaciones lineales

$\mathbf{a_1.x+ b_1.y = c_1}$

$\mathbf{a_2.x+ b_2.y = c_2}$

Resolvámoslo mediante el método de eliminación, restando miembro a miembro la segunda multiplicada por a_1 de la primera multiplicada por a_2

$$\mathbf{a_2\, a_1.x+ a_2\, b_1.y = a_2\, c_1}$$

$$-\quad \underline{\mathbf{a_1\, a_2.x+ a_1\, b_2.y = a_1\, c_2}}$$

$$\mathbf{y\, (a_2.b_1- a_1.b_2) = a_2.c_1 - a_1.c_2}$$

De la misma manera, restando la segunda multiplicada por $\mathbf{b_1}$ de la primera multiplicada por $\mathbf{b_2}$

$$\begin{array}{rl} & b_2\, a_1.x + b_2\, b_1.y = b_2.c_1 \\ - & \underline{b_1\, a_2.x + b_1\, b_2.y = b_1.c_2} \\ & x\,(b_2.a_1 - b_1.a_2) = b_2.c_1 - b_1.c_2 \end{array}$$

Así entonces resulta:

$$x = (b_2.c_1 - b_1.c_2) / (b_2.a_1 - b_1.a_2)$$
$$y = (a_2.c_1 - a_1.c_2) / (a_2.b_1 - a_1.b_2)$$

Para que sean iguales los denominadores de ambas expresiones, multiplicamos y dividamos la primera por (-1), con lo cual queda:

$$x = (c_2.b_1 - c_1.b_2) / (a_2.b_1 - a_1.b_2)$$
$$y = (a_2.c_1 - a_1.c_2) / (a_2.b_1 - a_1.b_2)$$

Observemos que los denominadores son iguales, diferencias de productos cruzados entre coeficientes, y que los numeradores se obtienen reemplazando en aquél el coeficiente de la incógnita respectiva por el respectivo término independiente.

Si nos tomamos el trabajo de calcular algebraicamente las soluciones para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, a saber:

$$a_1.x + b_1.y + c_1.z = d_1$$

$$a_2.x + b_2.y + c_2.z = d_2$$

$$a_3.x + b_3.y + c_3.z = d_3$$

obtendremos el mismo denominador para las expresiones de las soluciones **x**,**y**,**z** , a saber:

$$a_1.b_2.c_3 + a_2.b_3.c_1 + a_3.b_1.c_2 - a_3.b_2.c_1 - a_1.b_3.c_2 - a_2.b_1.c_3$$

La regla para obtener el denominador es formar productos de tres coeficientes que no tengan igual letra o subíndice y sumarlos o restarlos según el orden en que se permutan los índices.

Se distinguen así dos tipos de permutaciones: de orden par u orden impar. Son de orden par las series en el que el número de inversiones del orden básico **1,2,3** es par, por ejemplo **3,1,2** (el **1** reemplazó al **2** y el **3** reemplazó al **1**: dos permutaciones). La **2,3,1** es par pues sale de reemplazar el **1** por el **2** y el **2** por el **3** (también dos permutaciones) Son de orden impar las permutaciones en el que el número de inversiones del orden básico **1,2,3** es impar, por ejemplo **1,3,2** (el **3** reemplazó al **2**: una permutación), o el **2,1,3** (el **2** reemplazó al **1**: una permutación)

El numerador para **x** resulta:

$$d_1.b_2.c_3 + d_2.b_3.c_1 + d_3.b_1.c_2 - d_3.b_2.c_1 - d_1.b_3.c_2 - d_2.b_1.c_3$$

El numerador para **y** resulta:

$$a_1.d_2.c_3 + a_2.d_3.c_1 + a_3.d_1.c_2 - a_3.d_2.c_1 - a_1.d_3.c_2 - a_2.d_1.c_3$$

El numerador para **z** resulta:

$$a_1.b_2.d_3 + a_2.b_3.d_1 + a_3.b_1.d_2 - a_3.b_2.d_1 - a_1.b_3.d_2 - a_2.b_1.d_3$$

Se ve que **los numeradores** se obtienen, como en el caso de dos variables, reemplazando en la expresión del denominador los coeficientes correspondientes a cada variable por el correspondiente término independiente.

Ahora bien, consideremos la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones cualquiera, por ejemplo la del sistema recién visto:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

Dicha matriz es siempre cuadrada (igual número de filas que de columnas), porque los sistemas de ecuaciones que admiten solución única tienen igual número de ecuaciones que de incógnitas. Recordemos cómo es esa cuestión:

Igual número de ecuaciones que de incógnitas: Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas corresponde geométricamente a tres planos en el espacio. Si dichos planos tienen un punto común de coordenadas x,y,z, esa es la solución del sistema. En tal caso los coeficientes no son proporcionales. Puede ocurrir que el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas represente a tres planos, pero dos de ellos paralelos entre sí, en cuyo caso el tercero determina con ellos no un punto sino un par de paralelas. En tal caso las dos ecuaciones del sistema correspondientes a los planos paralelos entre sí poseen coeficientes proporcionales. También puede ocurrir que los tres planos sean paralelos y por lo tanto no se corten, que es el caso correspondiente a tres ecuaciones con coeficientes proporcionales entre sí. Cuando dos o más ecuaciones tienen proporcionales los términos independientes además de los coeficientes de las incógnitas, esas ecuaciones son equivalentes y representan el mismo plano. Son ecuaciones repetidas, el sistema es incompleto y por lo tanto su solución no está determinada.

Menor número de ecuaciones que de incógnitas: Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas representa a un par de planos que pueden cortarse según una recta (coeficientes no proporcionales) o ser paralelos (coeficientes proporcionales).

Mayor número de ecuaciones que de incógnitas: Un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas representa a cuatro planos. Ellos pueden cortarse en un punto o no. En el primer caso dicho punto está determinado por la intersección de sólo tres de ellos, de manera que podríamos prescindir de una cualquiera de las ecuaciones para hallar la solución del sistema si todas tienen coeficientes no proporcionales entre sí. En caso de que dos de ellas tengan coeficientes proporcionales, debe prescindirse de una de ellas. SI más de dos tienen coeficientes proporcionales entre sí, el sistema no tiene un punto solución, ya que representa geométricamente a cuatro planos, con más de dos paralelos entre sí.

El caso de cuatro planos que no se corten en un punto corresponde al caso de cuatro ecuaciones con tres incógnitas con coeficientes no proporcionales. Se pueden formar cuatro grupos diferentes de tres planos cada uno, que determinan los vértices de un tetraedro. Es el caso de muchas situaciones prácticas donde hay sobreabundancia de datos. Se generan así sistemas de más ecuaciones que incógnitas que pertenecen a este último tipo, donde dos o más ecuaciones no tienen coeficientes exactamente proporcionales, que permitan matemáticamente la eliminación de una o más de ellas. La región del espacio (o del hiperespacio) que delimitan los planos (o hiperplanos) correspondientes a cada una de las ecuaciones es una poliedro dentro del cual se encuentra la solución práctica (aproximada) al problema.

Volviendo a nuestro sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, bauticemos como **determinante** de la matriz de sus coeficientes al polinomio que nos da el denominador del sistema, simbolizándolo colocando a la matriz entre barras, es decir:

$$\textbf{det } \{a,b,c\} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1.b_2.c_3 + a_2.b_3.c_1 + a_3.b_1.c_2 - c_1.b_2.a_3 - c_2.b_3.a_1 - c_3.b_2.a_1$$

De acuerdo a lo visto, las soluciones del sistema se obtienen haciendo el cociente de los determinantes:

x = det {d,b,c} / det {a,b,c}

y = det {a,d,c} / det {a,b,c}

z = det {a,b,d} / det {a,b,c}

Habrá solución en la medida que el denominador del sistema no se anule. Si esto último ocurre y los numeradores no son nulos significa que el sistema representa a tres planos paralelos. Veremos que, consecuentemente, un determinante que tiene una o más filas o columnas proporcionales entre sí es nulo.

Cuando también los numeradores son nulos, significa que los términos independientes también presentan la misma proporcionalidad que los coeficientes. Se trata, como vimos, de un sistema que representa al mismo plano en dos o más ecuaciones distintas.

Ejemplos:

a) En el siguiente sistema la segunda ecuación es igual a la primera multiplicada por 3, o sea que ambas aportan la misma información, dicen lo mismo.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 9y = 15 \end{cases}$$

Su solución es indeterminada **x=0/0** ; **y=0/0**, lo que indica que falta otra ecuación para que lo anterior sea un verdadero sistema.

b) Sea el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 6x + 9y + 12z = 16 \\ 2x + 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

El determinante de los coeficientes (denominador) es nulo, (tiene sus filas proporcionales), no así los numeradores para **x,y,z** que valen respectivamente **–1,-2, 2** de modo que las soluciones son del tipo:
x=-1/0, y=-2/0, z=2/0

Si bien la división de un número por cero no es una operación permitida, el hecho que un procedimiento arroje tal cociente nos autoriza a pensar desde el punto de vista práctico en un valor enorme. Si se trata de una coordenada, el resultado señala un lugar situado muy lejos. Este concepto es propio de una visión proyectiva, como la que tenemos observando imágenes en perspectiva de las vías de un tren, que son paralelas pero se cortan en el horizonte, en un punto que se ve pero "no se toca" llamado "punto impropio". Las soluciones anteriores señalan pues, dicho punto como intersección entre los tres planos paralelos.

c) Consideremos ahora un sistema "como la gente":

$$\begin{cases} 2x-3y+2z=2 \\ -1x+6y=4 \\ 8x+10z=6 \end{cases}$$

El determinante de los coeficientes es:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -6$$

El numerador de la incógnita **x** es:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 168$$

De manera que **x = 168/(-6) = - 28**

El numerador de la incógnita **y** es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 24$$

Entonces resulta **y = 24/(-6) = - 4**

El numerador de la incógnita **z** es:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \\ 8 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -138$$

Así es que **z = -138/(-6) = 23**

Reemplazando los valores de las soluciones en las ecuaciones respectivas, se obtienen las identidades:

$$\begin{cases} 2(-28)-3(-4)+2(23)=2 \\ -1(-28)+6(-4)=4 \\ 8(-28)+10(23)=6 \end{cases}$$

que prueban que las soluciones son correctas.

d) Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 6 \\ 6x + 9y + 7z = 18 \\ 2x + 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

D = -10
x = (-45)/(-10) = 4,5
y = 10/(-10) = -1
z = 0/(-10) = 0

Que **z=0** puede deducirse a priori observando que su numerador, el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & 18 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

tiene la primera y segunda fila proporcionales, y por lo tanto es nulo.

Propiedades y cálculo de determinantes de cualquier cantidad de elementos

Se puede demostrar que el valor de un determinante correspondiente a cualquier matriz cuadrada de $\mathbf{m^2}$ elementos se obtiene generalizando el procedimiento explicado para el de tres por tres, es decir haciendo los productos de **m** factores formados con los coeficientes de la matriz de manera que en cada producto no se repitan elementos de la misma fila o columna, y haciendo la suma algebraica de los mismos, cambiando el signo de los que resulten de una permutación impar.

Algunas propiedades importantes de los determinantes

Las siguientes propiedades de los determinantes salen considerando su algoritmo de cálculo, explicado en el párrafo anterior.

a) El valor de un determinante no cambia permutando filas por columnas.

b) Un determinante que posea un factor común a una fila o columna puede resolverse como el producto de ese factor por el determinante que tiene los valores de la fila o columna correspondiente divididos por ese factor:

Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \,.\, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 7 \\ 1 & 1 & 1{,}5 \end{vmatrix}$$

Es decir que el valor del producto de un determinante por un número es igual al valor del determinante que se obtiene multiplicando por ese número todos los elementos de una fila o una columna.

c) El determinante que se obtiene permutando dos filas o dos columnas entre sí (sin cambiar su orden relativo) mantiene el mismo valor absoluto pero cambia de signo.

d) Consideremos un determinante que tenga dos o más líneas (filas o columnas) iguales. Permutando estas debería obtenerse un determinante de igual valor y distinto signo. Sin embargo el determinante es el mismo, ya que las líneas permutadas son iguales. El único valor que puede cumplir con la condición de ser igual al mismo cambiado de signo es cero.

Entonces:
Un determinante que tenga filas o columnas iguales es nulo.

Un determinante que tenga filas o columnas proporcionales es nulo. (porque sacando el factor de proporcionalidad afuera del determinante, nos queda dicho factor multiplicado por un determinante con dos líneas iguales, que como vimos es nulo)

e) Un determinante no altera su valor si sumamos a una línea, otra paralela multiplicada por una constante, es decir si hacemos una combinación lineal entre ellas.

En efecto, transformemos el determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \Delta$$

sumando a la segunda fila la primera por un factor constante k . Se lo puede descomponer en dos determinantes, uno igual al primero más otro nulo, ya que tiene dos filas proporcionales:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+ka & e+kb & f+kc \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ g & h & i \end{vmatrix} = \Delta$$

Con transformaciones de este tipo se pueden anular elementos de un determinante a voluntad, eligiendo la combinación lineal adecuada con otra línea.

Por ejemplo, se desea eliminar el 2 del primer determinante. Para ello restamos a la primera fila la tercera multiplicada por el propio 2 con lo cual es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 7 \\ 1 & -6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 15 & -2 \\ 6 & 9 & 7 \\ 1 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -75$$

Como ejercicio, trate el lector de transformar nuevamente el segundo determinante de manera que aparezca un cero en lugar del seis de la segunda fila. Hallará de este modo que queda:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 7 \\ 1 & -6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 15 & -2 \\ 0 & 45 & -11 \\ 1 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -75$$

Con tal tipo de transformaciones y conociendo lo que se explica en el punto siguiente sobre “adjuntos”, se puede calcular fácilmente el valor de un determinante cualquiera.

Adjuntos

Eliminando de un determinante una fila **j** y una columna **k** cualesquiera, queda un determinante de un orden menor llamado **adjunto** del elemento $\mathbf{a_{jk}}$ (que estaba en la intersección de la fila y columna eliminadas)

El producto de un elemento por su adjunto es uno de los términos del desarrollo que da el valor del determinante, con su signo o cambiado de signo según el elemento esté a un número par o impar de lugares del extremo superior izquierdo de la matriz.

Se puede, de tal manera, descomponer el valor de un determinante en términos de elementos de una fila o columna por sus adjuntos.

He aquí el desarrollo de un determinante mediante los elementos de la primera fila multiplicados por sus respectivos adjuntos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \,.\, \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \,.\, \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4 \,.\, \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{2.(27-14) - 3.(18-14) + 4.\,(12-18) = -10}$$

Nótese que el segundo término se resta porque el elemento (3) está a un lugar (impar) del extremo de la matriz. Este método permite trabajar con determinantes de un orden una unidad menor al original.

Sea en general un determinante de m^2 elementos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2(m-1)} & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3(m-1)} & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & a_{(m-1)3} & \dots & a_{(m-1)m-1} & a_{(m-1)m} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{m(m-1)} & a_{mm} \end{vmatrix}$$

El valor D de un determinante a partir de los elementos de la fila **f** se expresa sintéticamente (llamando A_{ij} al adjunto correspondiente elemento a_{ij}) :

$$D = S_{(j=1..m)}\ \mathbf{(-1)^{(f+j)}.a_{fj}.A_{fj}}$$

Nótese que el signo viene dado por el factor $\mathbf{(-1)}^{\mathbf{(f+j)}}$, que vale **+1** si el exponente (orden de la fila mas orden de la columna del elemento correspondiente al adjunto) es par , y (**-1**) si es impar, es decir **f+j** mide la cantidad de lugares de los que dista el elemento al extremo superior izquierdo de la matriz.

Por ejemplo, si desarrollamos en función de la primera fila es (f=1):

$$D = S_{(j=1,2..m)}\ \mathbf{(-1)^{(1+j)}.a_{1j}.A_{1j}}$$

A su vez el adjunto $\mathbf{A_{1j}}$ es un determinante que vale:

$$\mathbf{A_{1j}} = S_{(j=2..m)}\mathbf{(-1)^{(2+j)}.a_{2j}.A_{2j}}$$

y también:

$$\mathbf{A_{2j}} = S_{(j=3..m)}\mathbf{(-1)^{(3+j)}.a_{3j}.A_{3j}}$$

..

$$\mathbf{A_{(m-1)\,j}} = S_{(j=(m-1).m)}\mathbf{(-1)^{(m+j)}.a_{(m-1)\,j}\,.A_{(m-1)j}}$$

pero $\mathbf{A_{(m-1)j} = A_{(m-1)\ (m-1)} = a_{mm}}$ (elemento del determinante de la esquina inferior derecha).

Así conviene calcular el determinante a partir de esta última expresión e ir reemplazando los valores de los adjuntos en las expresiones inmediatas anteriores, hasta llegar al valor de D

Cálculo numérico de determinantes por el método de Chiò.

Se puede transformar un determinante de orden **m** en otro equivalente anulando todos los elementos de una fila o columna cualquiera menos uno, en cuyo caso el valor del determinante es el producto del elemento no nulo por el adjunto. Éste es un determinante de orden **m-1** , que se transforma por el mismo método hasta llegar a **m=1**, cuyo valor coincide con el único elemento de la matriz.

La muy ingeniosa y útil transformación aludida se debe al matemático italiano Felice Chiò (1813-1871). Se logra eligiendo un elemento cualquiera del determinante, que se llama **elemento pivote**, situado en la fila **F** y la columna **C**. Se saca un factor común dividiendo la columna **C** por el valor del elemento pivote **a(F,C)**, que entonces pasa a valer **1** en el nuevo determinante. Como vimos antes, podemos anular un elemento **a(f,C)** de la columna pivote **C** y la fila **f** restándole el propio elemento **a(f,C)** (factor constante para toda la fila) por el elemento de la fila pivote correspondiente, en este caso **a(F,C)=1** . Así entonces será el nuevo **a(f,C) = a(f,C) – a(f,C).a(F,C) = 0** Extendiendo ese procedimiento a toda la fila **f** será:

a(f,c) = a(f,c) – a(f,C).a(F,c)

Y por fin se aplica este algoritmo a todas las filas (menos la del pivote F), restando a cada elemento el producto del elemento de su misma fila **i** y columna pivote **C** , **a(i,C)** por el elemento **a(F,j)** de la fila pivote **F** y la columna **j**, o sea **a(i,j) = a(i,j) – a(i,C).a(F,j)**.

El desarrollo de Chiò genera un determinante cuyos elementos son sumas de términos y que por lo tanto puede descomponerse en el primitivo más una serie de determinantes adicionales. Dichos determinantes adicionales tienen cada uno dos filas proporcionales y por lo tanto son nulos.

El programa siguiente, escrito en el viejo pero efectivo lenguaje **BASIC**, está confeccionado para calcular un sistema de cualquier número de ecuaciones lineales mediante determinantes.

La rutina del cálculo del determinante propiamente dicho comienza en la línea 370 y aplica el procedimiento de Chiò recién expuesto.

```
10 CLS
20 PRINT "Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por determinantes"
30 INPUT "Número de ecuaciones:"; K
40 W = K + 1
45 REM    Reserva lugar en memoria para alojar matrices de coeficientes A, B, C y términos independientes D y X
50 DIM A(W, W), B(W, W), C(W, W), D(W), X(W)
60 PRINT "Entrar coeficientes y términos independientes por filas"
70 PRINT "Si se equivoca, cuando termine tendrá oportunidad de corregir"
75 REM Rutina para entrar coeficientes y términos independientes.
80 FOR I = 1 TO K: FOR J = 1 TO K
90 PRINT "A("; I; ","; J; ")= "; : INPUT "", C(I, J)
100 NEXT J
110 PRINT "D("; I; ")= "; : INPUT D(I)
120 NEXT I
125 REM    Rutina para corregir valores de entrada.
130 PRINT : INPUT "Algún cambio en los valores? (S/N) ", A$
140 IF A$ = "s" OR A$ = "S" THEN 150 ELSE 220
150 INPUT "Entre I,J del coeficiente  o  0,0  si es un término independiente ", I, J
155 IF I > K OR J > K THEN PRINT "No existe ese coeficiente": GOTO 150
158 IF I = 0 XOR J = 0 THEN PRINT "No existe ese coeficiente": GOTO 150
160 IF I <> 0 AND J <> 0 THEN 190
170 INPUT "Entre el I del término independiente ", I
180 IF I <= 0 OR I > K THEN PRINT "No existe ese término": GOTO 170
185 PRINT "D("; I; ")="; : INPUT "", D(I): GOTO 200
190 PRINT "A("; I; ","; J; ")="; : INPUT "", C(I, J)
200 INPUT "¿Otra enmienda? (S/N) ", A$
210 IF A$ = "S" OR A$ = "s" THEN 150
220 GOSUB 350 : REM Subrutina para copiar la matriz de coeficientes C en A
230 GOSUB 370 : REM Cálculo del determinante.
240 IF D = 0 THEN : PRINT "D="; D: PRINT "SISTEMA INCOMPATIBLE": END : REM termina el programa si el determinante de los coeficientes es nulo.
250 D0 = D : REM guarda el valor del determinante recién calculado en D0
260 FOR J = 1 TO W - 1
270 GOSUB 350
280 FOR I = 1 TO W - 1
```

```
290 A(I, J) = D(I): NEXT I
300 GOSUB 370
310 X(J) = D / D0: PRINT TAB(25); "X("; J; ")= "; X(J)
320 GOSUB 350
330 NEXT J
340 END
350 REM Subrutina para copiar la matriz de coeficientes C en A y asignar el valor unitario a D
355 FOR R = 1 TO W - 1: FOR S = 1 TO W - 1
360 A(R, S) = C(R, S): NEXT S, R: D = 1: RETURN
370 REM Cálculo del determinante propiamente dicho
375 F = 1: K = W – 1 : REM K es un contador que comienza por el Nº de filas o columnas del determinante (W-1)
380 C = 1
390 IF A(F, C) = 0 AND C < K THEN C = C + 1: GOTO 390 : REM Busca un elemento de la fila no nulo, que será el pivote
400 F1 = F: C1 = C : REM Asigna los valores de fila y columna del elemento a F1 y C1
410 A = A(F1, C1) : REM Asigna a A el valor del elemento pivote.
420 IF A = 0 THEN D = 0: GOTO 590 : REM Y claro... si toda una columna es nula, el determinante también lo será..
430 FOR C = 1 TO K
440 A(F1, C) = A(F1, C) / A : REM Divide los elementos de la columna C por A para tener elemento pivote unitario.
450 NEXT C
460 D = D * A * (-1) ^ (F1 + C1) : REM Calcula el valor del determinante, asignándole el signo según el lugar que el elemento pivote ocupa en la matriz.
470 FOR P = 1 TO K
480 FOR Q = 1 TO K
490 A(P, Q) = A(P, Q) - A(P, C1) * A(F1, Q) : REM aplica el proceso de transformación de Chiò.
500 NEXT Q, P
510 FOR Q = 1 TO K: FOR P = F1 TO K - 1
520 A(P, Q) = A(P + 1, Q): NEXT P, Q
530 FOR P = 1 TO K: FOR Q = C1 TO K - 1
540 A(P, Q) = A(P, Q + 1)
550 NEXT Q, P
560 K = K – 1 : REM Resta uno al contador que señala el orden del determinante.
570 IF K = 0 THEN 590 : REM termina el proceso cuando se llega a una reducción total del orden K
580 GOTO 380
590 PRINT "D= "; D
600 RETURN
```

Consejo importante: Aún disponiendo de una máquina con una planilla de cálculo o con un programa como el recién visto, que permiten calcular un determinante con rapidez y precisión, es conveniente hacer un examen ocular para ver si existen algunas de las características apuntadas anteriormente en determinantes cuyo tamaño lo permita. Ellas no sólo simplifican el cálculo del determinante sino que dan importante información sobre el sistema que éste representa. Por ejemplo, la posible igualdad o proporcionalidad entre filas o columnas, o la presencia de filas o columnas con elementos ceros o unos son fáciles de notar. La simetría o asimetría de la matriz también puede constatarse rápidamente. Proporcionalidad o igualdad hablan de funciones dependientes o condiciones insuficientes para la resolución de un problema. Ceros o unos en determinadas posiciones, una matriz simétrica y otras características de forma y disposición de los elementos de un determinante son muchas veces importantes indicadores de un planteo acertado o equivocado del problema generador.

Vectores y matrices

Recordemos que los vectores son entes apropiados para representar cosas cuya magnitud requiere ser definida por más de un número (un par o una terna o un conjunto de cuatro o más números, según el número de dimensiones). Son ejemplos típicos de vectores los que indican traslaciones en el plano o en el espacio, la velocidad de un móvil o su aceleración, las fuerzas, los campos gravitatorios y electromagnéticos.

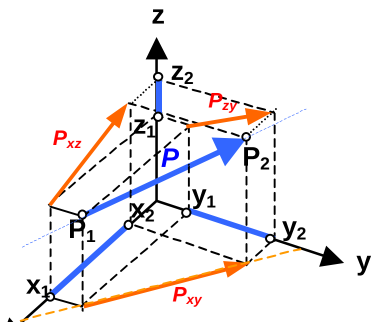
Son también convenientemente representadas por vectores las corrientes alternas, los sonidos con sus armónicos, las rotaciones de cuerpos y los momentos de las fuerzas.

La representación más común de un vector es mediante una flecha de longitud proporcional a la acción que representa. Es el **módulo** o **intensidad** del vector. También hace falta especificar la dirección y el sentido de esa flecha, cosas que están expresadas en el **argumento** o **ángulo** de orientación con respecto al de un eje de referencia.

El sentido puede estar indicado por el signo del módulo, o en todo caso está implícito si el argumento es un ángulo orientado por la dirección del módulo. Así, el peso de un cuerpo rígido homogéneo de masa 2 Kg viene indicado por una flecha de 2 unidades de longitud en la escala de fuerzas, cuyo extremo está situado en el punto de aplicación (centro de gravedad del cuerpo) y dirigida hacia abajo. Si la dirección se expresa asignándole un ángulo, por ejemplo 90º con respecto a la horizontal, deberá agregarse signo a la fuerza, por ejemplo negativo para indicar que es hacia abajo. También puede prescindirse del signo o sentido y considerar siempre positivo al módulo si se especifica una convención de ángulos orientados por aquél. Por ejemplo para una fuerza vertical dirigida hacia abajo el ángulo podrá indicarse como –90º o también +270º. De acuerdo a lo dicho, son equivalentes las expresiones ***F*** = **2,-90º** = **-2,90º** = **2,270º**

Los vectores pueden ser con punto de aplicación o libres, según representen magnitudes para las que sea necesario definir un lugar de aplicación o no. Por ejemplo, la fuerza sobre un cuerpo rígido no requiere definir el punto de aplicación, aunque sí la recta de acción. En cambio la deformación de un cuerpo no es la misma aplicando la fuerza en cualquier punto de la recta de acción, requiriéndose en ciertos problemas de elasticidad no un vector libre sino uno con punto de aplicación .

Si los vectores están enmarcados por una sistema de ejes coordenados resulta útil definirlos por sus componentes o proyecciones sobre los mismos, o bien por su intensidad y las direcciones que forman con esos ejes (ángulos o los cosenos directores correspondientes).



VECTOR EN EL ESPACIO

En esta obra se representa a los vectores con letras en negrita itálica, por ejemplo ***V*** y a los escalares en negrita normal, por ejemplo **m**. Los módulos de los vectores, por ser escalares, se representan con negrita normal, así |***V***|=**V**

En la figura el vector en el espacio de tres dimensiones ***P*** = $\mathbf{P_2}$ **-**$\mathbf{P_1}$ viene definido por el segmento orientado $\mathbf{P_1P_2}$ y son sus tres proyecciones los segmentos $\mathbf{(x_2\text{-}x_1)}$, $\mathbf{(y_2\text{-}y_1)}$, $\mathbf{(z_2\text{-}z_1)}$; (nótese que $\mathbf{(x_2\text{-}x_1)}$ es, según el dibujo, de signo negativo ya que $\mathbf{x_2<x_1}$). El punto de aplicación es $\mathbf{P_1}$, de coordenadas ($\mathbf{x_1,y_1,z_1}$). La recta de acción de ***P*** forma con los ejes **x,y,z** respectivamente los ángulos a, b, g de manera que se cumplen las relaciones:

$$|P| = \sqrt{(x_2\text{-}x_1)^2+(y_2\text{-}y_1)^2+(z_2\text{-}z_1)^2} = P$$

$$(x_2\text{-}x_1) = P.\cos(a) = P_x$$

$$(y_2\text{-}y_1) = P.\cos(b) = P_y$$

$$(z_2\text{-}z_1) = P.\cos(g) = P_z$$

$$\cos^2(a) + \cos^2(a) + \cos^2(a) = 1$$

El vector ***P*** puede definirse opcionalmente por otras ternas en vez de sus proyecciones, por ejemplo:

- La longitud del segmento orientado o módulo de ***P***, o sea |***P***| = $\sqrt{(x_2\text{-}x_1)^2+(y_2\text{-}y_1)^2+(z_2\text{-}z_1)^2}$ = **P**
- Dos de los tres ángulos a,b,g que forma su recta de acción respectivamente con los ejes **x y z**.

Otra forma de definir ***P*** es usando las proyecciones del vector sobre los planos xy, xz e yz. que están indicadas en el dibujo por las flechas anaranjadas. En este caso, como en los otros, bastan tres números independientes, por ejemplo un vector proyección (dos componentes) y el módulo |***P***|

Se puede expresar a un vector ***P*** como suma de una componente vectorial para cada eje. Para ello hay que definir para cada eje de coordenadas un vector unitario con la dirección del eje correspondiente, llamado **versor**. El versor multiplicado por la proyección del vector sobre el eje da la componente vectorial respectiva. Así, el vector tridimensional ***P*** se puede expresar como:

P **= P.cos(a).** ***i*** **+ P.cos(b).** ***j*** **+ P.cos(g).** ***k***

donde ***i, j, k*** son los versores correspondientes

Si bien las magnitudes vectoriales más comunes están definidas por dos o tres números (vectores en el plano o en el espacio respectivamente) puede haber vectores de un número mayor de dimensiones, que podemos imaginar representados como flechas en el correspondiente hiperplano.

Un vector se puede también representar por una matriz en columna, cuyos elementos son las proyecciones del vector en cuestión para cada dirección. Por ejemplo el vector ***P*** de la figura tiene viene representado por la matriz:

$$\begin{Bmatrix} (x_2\text{-}x_1) \\ (y_2\text{-}y_1) \\ (z_2\text{-}z_1) \end{Bmatrix}$$

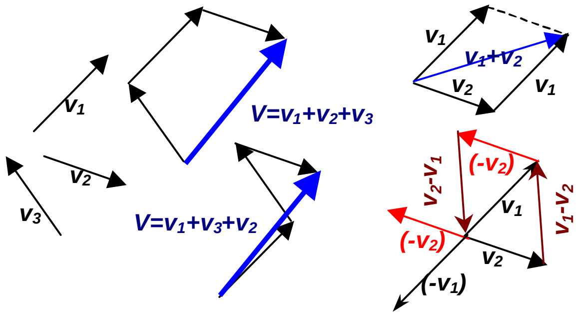
Operaciones con vectores

Las magnitudes vectoriales se combinan y transforman generando una serie de operaciones entre los vectores:

Suma y resta de vectores

La suma de dos o más vectores representa la acción combinada de todos ellos. Nos es familiar a través de la regla del paralelogramo, tan empleada en física para sumar fuerzas o desplazamientos. Se basa en el principio de superposición, admitiendo que las acciones representadas por cada sumando se realizan independientemente una después de la otra, no importando el orden (es decir que la suma vectorial goza de la propiedad conmutativa)

Suma y resta de vectores en el plano



Si los vectores son libres, y refiriéndonos en particular a los que se puedan dibujar en dos o tres dimensiones (en el plano o en el espacio) se obtiene la suma o resultante de varios vectores colocándolos uno a continuación del otro en cualquier orden, manteniendo su intensidad o módulo y su dirección y sentido. Se obtiene así una línea quebrada y como resultante vectorial al vector que tiene como extremo el del último segmento agregado y como principio el principio del primero.

Es fácil ver que la suma de vectores genera un vector cuyas componentes según los ejes coordenados son suma algebraica de las componentes o proyecciones de los sumandos.

La resta de vectores es equivalente a la suma cambiando el sentido a uno de los vectores, por ejemplo ***a-b = a+(-b)***

Suma y resta de vectores gozan de la propiedad asociativa, es decir ***a-b+c= (a-b)+c = a –(b+c)***

Producto de vectores

Un número multiplicado por un vector da otro vector de igual dirección y sentido y cuya intensidad es la del vector original multiplicado por el número en cuestión.

Así siendo k un número cualquiera se define el prducto **k.*P*** = ***Q*** donde |***Q***| =k.|***P***| = **k.P**

(Ya vimos antes, por ejemplo, que el versor (vector unitario) multiplicado por la proyección sobre el eje del vector (escalar) da la componente vectorial de éste en la dirección del eje).

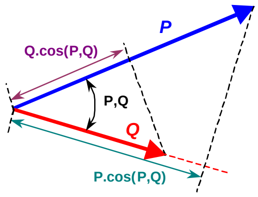
Las aplicaciones vectoriales en física y geometría justifican que se definan dos tipos de productos entre vectores: el producto escalar y el producto vectorial.

Producto escalar (también llamado producto interno de dos vectores)

Como su nombre lo indica, el resultado de dicha operación entre dos vectores es un escalar. El producto escalar entre ***P*** y ***Q*** se simboliza con la notación ***PxQ*** y se define como:

PxQ =|***P***|.|***Q***|.cos(P,Q) = **P.Q.cos(P,Q)**

indicándose con (P,Q) el ángulo que forman entre sí los dos vectores.



Siendo |***P***|.cos(P,Q)=P_q y |***Q***|.cos(P,Q)=Q_P las proyecciones de un vector sobre el otro, el resultado del producto escalar es máximo cuando los vectores son paralelos y nulo cuando son perpendiculares.

Una aplicación típica del producto escalar es el cálculo del trabajo de una fuerza, que se define como la proyección de la fuerza ***F*** sobre la dirección del camino recorrido multiplicada por la longitud ***d*** de ese camino. En ese caso la distancia recorrida se considera como un vector y así resulta:

Trabajo = ***Fuerza*** x ***distancia*** = ***F*** x ***d*** = **F.d.cos(F,d)**

La generalización del concepto de trabajo a otros vectores que no representen a fuerzas sino a otras magnitudes vectoriales cualesquiera se llama **circulación** del vector correspondiente a lo largo del camino dado.

Si expresamos a los vectores como suma de componentes, el producto escalar es el producto de dos polinomios. Por ejemplo, en tres dimensiones:

$PxQ = [\,P_x.i + P_y.j + P_z.k\,] \times [\,Q_x.i + Q_y.j + Q_z.k\,] =$

$= P_x.i \times Q_x.i + P_x.i \times Q_y.j + P_x.i \times Q_z.k +$

$+ P_y.j \times Q_x.i + P_y.j \times Q_y.j + P_y.j \times Q_z.k +$

$+ P_z.k \times Q_x.i + P_z.k \times Q_y.j + P_z.k \times Q_z.k$

De los nueve términos, son nulos los que tienen productos de versores diferentes, ya que el producto vectorial de dos vectores perpendiculares es nulo. Quedan pués sólo tres no nulos:

$PxQ = P_x.i \times Q_x.i + P_y.j \times Q_y.j + P_z.k \times Q_z.k$

y como es $i \times i = i^2 = 1$; $j \times j = j^2 = 1$; $k \times k = k^2 = 1$

resulta $P \times Q = P_x \times Q_x + P_y \times Q_y + P_z \times Q_z$

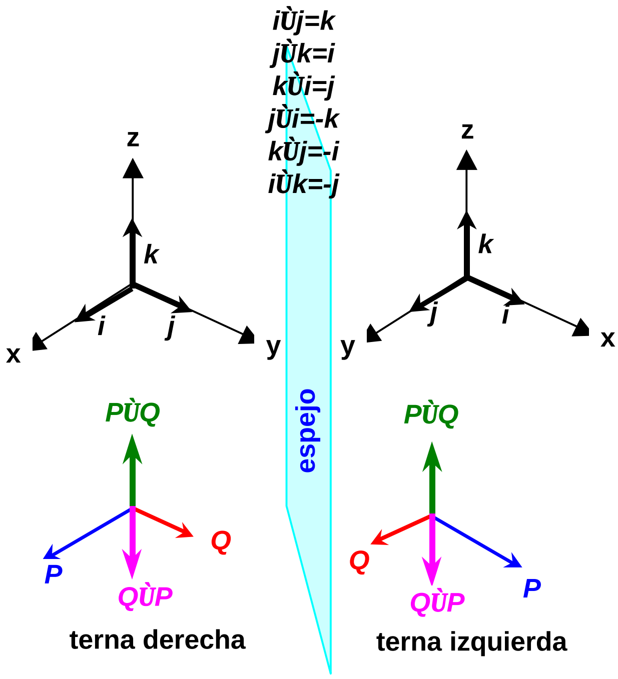
Es decir que el producto escalar de dos vectores es igual a la suma de los productos de las proyecciones sobre cada eje.

Producto vectorial (también llamado producto externo de dos vectores)

Las aplicaciones físicas requieren que se defina otro tipo de producto entre dos vectores, que de como resultado un vector en vez de un escalar. Es el producto vectorial, simbolizado por Ù y definido por:

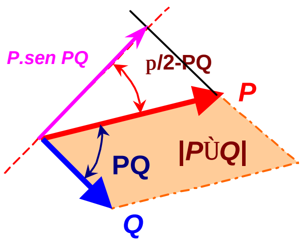
P Ù***Q*** = |***P***|.|***Q***|.sen(P,Q).***u***

El vector ***u*** tiene módulo unitario (es un versor) y su dirección es perpendicular al plano definido por los vectores intervinientes en el producto. El sentido depende de la terna adoptada, derecha o izquierda.



En la figura se puede ver cómo funciona el producto vectorial según la terna adoptada. El producto vectorial **NO** es conmutativo: cuando se permutan los factores cambia el signo del resultado, según se indica.

Así como el producto escalar está hecho a medida del cálculo de la circulación de un vector, el producto vectorial responde al cálculo del momento de un vector con respecto a un punto. Como se sabe por mecánica, el momento de una fuerza con respecto a un punto mide el efecto de torsión o giro de aquélla en éste. Otros momentos importantes son los cinéticos, o momentos de la cantidad de movimiento, el momento eléctrico o magnético, etc. En el cálculo de momentos, se considera como vector al segmento orientado entre el punto y el origen del primer vector.



En la figura se ve claramente que el producto vectorial tiene como módulo el área del paralelogramo formado con los vectores intervinientes.

El desarrollo del producto vectorial considerando las componentes de vectores en el espacio tridimensional:

$P = [\,P_x.i + P_y.j + P_z.k\,]$; $Q = [\,Q_x.i + Q_y.j + Q_z.k\,]$

resulta haciendo el producto de ambos trinomios:

P Ù ***Q*** =[P_x.***i*** + P_y.***j*** + P_z.***k***] Ù[Q_x.***i*** + Q_y.***j*** + Q_z.***k***] =

= P_x.***i*** ÙQ_x.***i*** + P_x.***i*** ÙQ_y.***j*** +P_x.***i*** ÙQ_z.***k*** +

+ P_y.***j*** ÙQ_x.***i*** + P_y.***j*** ÙQ_y.***j*** +P_y.***j*** ÙQ_z.***k*** +

+ P_z.***k*** ÙQ_x.***i*** + P_z.***k*** ÙQ_y.***j*** +P_z.***k*** ÙQ_z.***k***

y teniendo en cuenta que según lo visto es:

i Ù***j* = *k* , *j*** Ù***k* = *i* , *k*** Ù***i* =*j***

jÙ***i* = -*k* , *k*** Ù***j* = -*i* , *i*** Ù***k* =-*j***

y además, que por ser los versores paralelos a sí mismos es ***i*** Ù***i* = *j*** Ù***j* = *k*** Ù***k* = 0** de donde:

P Ù***Q*** = [P_x.***i*** + P_y.***j*** + P_z.***k***] Ù[Q_x.***i*** + Q_y.***j*** + Q_z.***k***] =

=P_x.Q_y.*k*- P_x.Q_z.*j* -P_y.Q_x.*k*+P_y.Q_z.*i*+P_z.Q_x.*j*-P_z.Q_y.*i*

=(P_y.Q_z - P_z.Q_y).*i* + (P_z.Q_x- P_x.Q_z).*j* +(P_x.Q_y-P_y.Q_x).*k*

La expresión anterior se puede poner en forma de determinante:

$$P Ù Q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

Considerando las propiedades de los determinantes, es fácil ver que el producto vectorial cumple la propiedad distributiva:

$$P Ù (Q+R) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x+R_x & Q_y+R_y & Q_z+R_z \end{vmatrix} = P Ù Q + P Ù R$$

Producto doble mixto

Consideremos el producto (***P***Ù***Q***)***.R* .** Éste puede escribirse omitiendo el paréntesis, ya que la expresión **P**Ù**(Q.R)** no tiene sentido. El resultado del doble producto mixto es un escalar que sale del producto interno entre ***R*** y ***P***Ù**Q**:

$$PÙQ.R = R_x. \begin{vmatrix} P_y & P_z \\ Q_y & Q_z \end{vmatrix} - R_y. \begin{vmatrix} P_x & P_z \\ Q_x & Q_z \end{vmatrix} + R_z \begin{vmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{vmatrix}$$

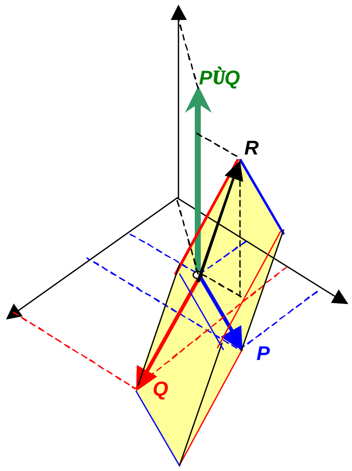
lo que también puede escribirse como determinante:

$$PÙQ.R = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

Pero como el valor de un determinante no cambia permutando filas dos veces, se verifica que:
P Ù***Q.R* = *Q*** Ù***R.P* = *R*** Ù***P.Q***

de manera que también pueden omitirse los signos de producto interno y externo, pudiéndose adoptar la expresión unívoca **(*P,Q,R*)** para el doble producto mixto.

El doble producto mixto, o más sencillamente el producto mixto, representa una importante cualidad geométrica derivada de los significados explicados para los productos interno y externo: Ya que el valor de ***P*** Ù***Q*** es el área del paralelogramo formado por los vectores ***P*** y ***Q*** , el producto mixto da el valor de esa área multiplicada por la proyección del tercer vector sobre la perpendicular al plano formado entre los dos primeros (que es la dirección del producto externo).



El resultado del producto mixto es pués igual al producto de la base por la altura del paralelogramo cuyas aristas son los vectores en juego, es decir igual al volumen del mismo.

Se deduce de lo anterior que si el producto mixto de tres vectores es nulo, estos están en el mismo plano, situación que corresponde al volumen nulo del paralelogramo que ellos definen en el espacio.

Así, un plano que pasa por tres puntos **P**,**Q**,**R** de respectivas coordenadas (**x_1**, **y_1**,**z_1**), (**x_2**,**y_2**,**z_2**), (**x_3**,**y_3**,**z_3**), debe tener puntos **S** cuyas coordenadas genéricas (**x**,**y**,**z**) sean tales que determinen con **P**,**Q**,**R** vectores coplanares, es decir que sea nulo el producto mixto de los vectores **S-P**, **S-Q, S-R**, o sea para:

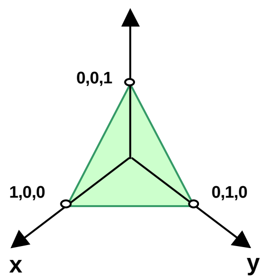
$$(S\text{-}P\ ,\ S\text{-}Q\ ,\ S\text{-}R) = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Restando la primera fila a las otras dos queda el determinante equivalente que expresa la ecuación del plano que pasa por tres puntos:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Nótese que el determinante así transformado representa al producto mixto **(*S-P* , *P-Q* , *P-R*)**, entre vectores también coplanares.

<u>Ejemplo:</u> Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos **P(1,0,0), Q(0,1,0), R(0,0,1),** representado en la figura adjunta**.**



Reemplazando en el determinante anterior resulta:

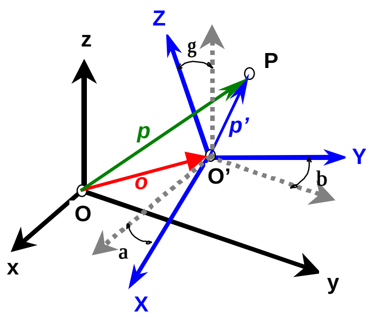
$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

el que desarrollado da:

(x-1)+y+z=0 ⇒ **x+y+z=1**, que es la ecuación pedida.

Transformaciones de coordenadas

Sean x_P, y_P, z_P las coordenadas de un punto en un sistema de ejes **x,y,z** ortogonales en el espacio. Las coordenadas X_P, Y_P, Z_P de ese mismo punto en otro sistema ortogonal **X,Y,Z** , depende de la posición del origen **O'** y de la orientación a,b,g de los ejes del nuevo sistema.



Así, de la figura se deduce que :

PO' = PO – OO' o también

$p' = p - o$

de donde se deduce que siendo las proyecciones de esos vectores las siguientes:

$x_P = p.\cos(p\wedge x)$ $y_P = p.\cos(p\wedge y)$ $z_P = p.\cos(p\wedge z)$

$x_{O'} = o.\cos(o\wedge x)$ $y_{O'} = o.\cos(o\wedge y)$ $z_{O'} = o.\cos(o\wedge z)$

$X_P = p'.\cos(p'\wedge X)$ $Y_P = p'.\cos(p'\wedge Y)$ $Z_P = p'.\cos(p'\wedge Z)$

resulta que:

$p' = X_P.i' + Y_P.j' + Z_P.k'$

$p = x_P.i + y_P.j + z_P.k$

$o = x_{O'}.i + y_{O'}.j + z_{O'}.k$

$p' = p - o = (x_P - x_{O'}).i + (y_P - y_{O'}).j + (z_P - z_{O'}).k$

Consideremos ahora la matriz formada por cosenos de los ángulos que forman los ejes entre sí:

$$\left\{ \begin{matrix} \cos(i'\wedge i) & \cos(i'\wedge j) & \cos(i'\wedge k) \\ \cos(j'\wedge i) & \cos(j'\wedge j) & \cos(j'\wedge k) \\ \cos(k'\wedge i) & \cos(k'\wedge j) & \cos(k'\wedge k) \end{matrix} \right\}$$

y considerando que el producto escalar entre versores da como resultado el coseno del ángulo entre ejes homólogos, es decir:

$i.i' = \cos(i\wedge i') = \cos$ a
$j.j' = \cos(j\wedge j') = \cos$ b
$k.k' = \cos(k\wedge k') = \cos$ g , etc.

y que además es

$i'.i' = j'.j' = k'.k' = 1$

$i'.j' = i'.k' = j'.k' = 0$

Multiplicando escalarmente sucesivamente ambos miembros de la ecuación ya vista

$X_P.i' + Y_P.j' + Z_P.k' = (x_P - x_{O'}).i + (y_P - y_{O'}).j + (z_P - z_{O'}).k$

por ***i',j',k'*** resultan las tres fórmulas de transformación buscadas:

$X_P = (x_P - x_{O'}).\cos(i'\wedge i) + (y_P - y_{O'}).\cos(i'\wedge j) + (z_P - z_{O'}).\cos(i'\wedge k)$

$Y_P = (x_P - x_{O'}).\cos(j'\wedge i) + (y_P - y_{O'}).\cos(j'\wedge j) + (z_P - z_{O'}).\cos(j'\wedge k)$

$Z_P = (x_P - x_{O'}).\cos(k'\wedge i) + (y_P - y_{O'}).\cos(k'\wedge j) + (z_P - z_{O'}).\cos(k'\wedge k)$

Las fórmulas de la transformación inversa se logran multiplicando escalarmente la anterior sucesivamente por ***i,j,k*** en vez de ***i',j',k'***, con los que se obtienen:

$(x_P - x_{O'}) = X_P.\cos(i'\wedge i) + Y_P.\cos(i'\wedge j) + Z_P.\cos(i'\wedge k)$

$(y_P - y_{O'}) = X_P.\cos(j'\wedge i) + Y_P.\cos(j'\wedge j) + Z_P.\cos(j'\wedge k)$

$(z_P - z_{O'}) = X_P.\cos(k'\wedge i) + Y_P.\cos(k'\wedge j) + Z_P.\cos(k'\wedge k)$

En el caso de una simple traslación (sin rotación de ejes) las anteriores dan:

$X_P = (x_P - x_{O'})$

$Y_P = (y_P - y_{O'})$

$Z_P = (z_P - z_{O'})$

Y para una rotación (sin traslación del origen) es:

$X_P = x_P.\cos(i'\wedge i) + y_P.\cos(i'\wedge j) + z_P.\cos(i'\wedge k)$

$Y_P = x_P.\cos(j'\wedge i) + y_P.\cos(j'\wedge j) + z_P.\cos(j'\wedge k)$

$Z_P = x_P.\cos(k'\wedge i) + y_P.\cos(k'\wedge j) + z_P.\cos(k'\wedge k)$

Transformaciones lineales y matrices

Las anteriores fórmulas son un caso especial de transformaciones del tipo:

$$X = a_{11}.\,x + a_{12}.\,y + a_{13}.\,z$$
$$Y = a_{21}.\,x + a_{22}.\,y + a_{23}.\,z$$
$$Z = a_{31}.\,x + a_{32}.\,y + a_{33}.\,z$$

que pueden considerarse que transforman las coordenadas **x,y,z** de un punto en las nuevas coordenadas **X,Y,Z** del **mismo punto** en **otra terna** de ejes. Otro enfoque de la cuestión es considerar que son las mismas que hacen corresponder a un punto **P** de coordenadas **x,y,z otro punto Q** de coordenadas **X,Y,Z** en **la misma** terna.

Dicha transformación está caracterizada por la matriz de los coeficientes:

$$A = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\}$$

Consideremos que las coordenadas **x,y,z** y **X,Y,Z** de los puntos **P** y **Q** respectivamente son las componentes de vectores ***P*** y ***Q*** que los puntos determinan con el origen de coordenadas.

Si expresamos dichos vectores con las matrices columna:

$$P = \left\{ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\} \qquad Q = \left\{ \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \right\}$$

la transformación **A.*P*= *Q*** se expresa matricialmente de la siguiente forma desarrollada:

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11}.\ x + a_{12}.\ y + a_{13}.z \\ a_{21}.x + a_{22}.\ y + a_{23}.\ z \\ a_{31}.\ x + a_{32}.\ y + a_{33}.z \end{Bmatrix}$$

Se ve que el producto de dos matrices se define como otra matriz formada por el producto escalar de las filas de la primera matriz por las columnas de la segunda.

Operaciones con matrices

Producto de transformaciones

Si un punto **P** se transforma en otro **Q** a través de la transformación **A** y ese punto **Q** se transforma en otro punto **R** mediante la transformación **B**, se puede considerar que la transformación de **P** a **R** se realiza mediante el producto de las transformaciones **A** y **B**, que se expresa matricialmente como una transformación **C = A.B**, de tal manera que ***R*=C.*P***

El desarrollo del producto **A.B=C** es:

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} a_{11}.b_{11}+a_{12}.b_{21}+a_{13}.b_{31} & a_{11}.b_{12}+a_{12}.b_{22}+a_{13}.b_{32} & a_{11}.b_{13}+a_{12}.b_{23}+a_{13}.b_{33} \\ a_{21}.b_{11}+a_{22}.b_{21}+a_{23}.b_{31} & a_{21}.b_{12}+a_{22}.b_{22}+a_{23}.b_{32} & a_{21}.b_{13}+a_{22}.b_{23}+a_{23}.b_{33} \\ a_{31}.b_{11}+a_{32}.b_{12}+a_{33}.b_{31} & a_{31}.b_{12}+a_{32}.b_{22}+a_{33}.b_{32} & a_{31}.b_{13}+a_{32}.b_{23}+a_{33}.b_{33} \end{Bmatrix}$$

Un término genérico de la fila **f** y la columna **c** del producto $\mathbf{c_{fc}}$ se expresa entonces como:

$$\mathbf{c_{fc} = S_{k=1..n}\ a_{fk}.b_{kc}}$$

Evidentemente, para poder hacer el producto de dos matrices el número de columnas del primer factor **A** debe ser igual al número de filas del segundo **B**

Examinando el procedimiento para efectuar el producto de dos matrices se ve que esta operación no es conmutativa, es decir que si **A.B=C** es $\mathbf{B.A^1C}$

Ejemplo:

Sean las matrices

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{Bmatrix}$$

$$B = \begin{Bmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

Con el procedimiento anterior resulta

$$A.B = \begin{Bmatrix} 3 & 7 & 23 \\ 10 & 34 & 19 \\ 0 & 4 & 9 \end{Bmatrix}$$

$$B.A = \begin{Bmatrix} 48 & -9 & 47 \\ 15 & 2 & 23 \\ -5 & -1 & -4 \end{Bmatrix}$$

Matriz inversa

Se llama matriz inversa $\mathbf{A^{-1}}$ de una matriz **A** a la que multiplicada por **A** da una matriz unitaria **I**, que tiene unos en la diagonal principal y ceros en todos los otros lugares.

$$\mathbf{A^{-1}.A = I = A.\ A^{-1}}$$

Por ejemplo, son matrices inversas las siguientes:

$$\begin{Bmatrix} 48 & -9 & 47 \\ 15 & 2 & 23 \\ -5 & -1 & -4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0{,}01530612 & -0{,}08469388 & -0{,}30714286 \\ -0{,}05612245 & 0{,}04387755 & -0{,}40714286 \\ -0{,}00510204 & 0{,}09489796 & 0{,}23571429 \end{Bmatrix}$$

ya que multiplicadas entre sí, en cualquier orden, dan como resultado la matriz unitaria (compruébese):

$$\mathbf{I} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Para hallar la matriz inversa $\mathbf{A^{-1}}$ de una matriz dada **A**, se calcula primeramente el determinante **|A|**, luego se halla la matriz adjunta de **A**, que es la que reemplaza los elementos $\mathbf{a_{i,j}}$ por sus adjuntos $\mathbf{A_{i,j}}$. A continuación se traspone esta matriz adjunta, cambiando filas por columnas. Los elementos de dicha matriz adjunta y traspuesta se dividen por **|A|**, obteniéndose entonces como resultado la inversa $\mathbf{A^{-1}}$

La justificación de tal método se comprende al comparar las operaciones con matrices con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, como se verá en el título siguiente.

Ejemplo: Calcular la matriz inversa de la ya vista:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 48 & -9 & 47 \\ 15 & 2 & 23 \\ -5 & -1 & -4 \end{Bmatrix}$$

cuyo determinante vale **|F| = 980**

La matriz adj F es:

$$\mathbf{adj\ F} = \begin{Bmatrix} 15 & -55 & -5 \\ -83 & 43 & -93 \\ -301 & -399 & 231 \end{Bmatrix}$$

y su traspuesta resulta:

$$\mathbf{(adj\ F)^T} = \begin{Bmatrix} 15 & -83 & -301 \\ -55 & 43 & -399 \\ -5 & -93 & 231 \end{Bmatrix}$$

la que divida por **|F| = 980** nos da $\mathbf{F^{-1}}$

$$\mathbf{F^{-1}} = \begin{Bmatrix} 0{,}01530612 & -0{,}08469388 & -0{,}307142857 \\ -0{,}05612245 & 0{,}043877551 & -0{,}407142857 \\ -0{,}00510204 & -0{,}09489796 & 0{,}235714286 \end{Bmatrix}$$

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices

Un sistema de ecuaciones lineales del tipo

$$\begin{cases} a_{11}.x + a_{12}.y + a_{13}.z = b_1 \\ a_{21}.x + a_{22}.y + a_{23}.z = b_2 \\ a_{31}.x + a_{32}.y + a_{33}.z = b_3 \end{cases}$$

puede escribirse matricialmente como **A.X=B** , donde **A** es la matriz de los coeficientes a_{ij}, **X** es el vector columna de componentes **x,y,z** solución del sistema, y **B** es el vector columna de los términos independientes b_1,b_2,b_3

Multiplicando ambos miembros por A^{-1}, se obtiene la solución:

$A^{-1}.A\;.\;X= A^{-1}.B$, de donde $X= A^{-1}.B$

Justificación del método para hallar la matriz inversa:
Como se recordará, las componentes de **X**, soluciones del sistema, se hallan con el método de los determinantes, haciendo el cociente entre el determinante sustituído con los términos independientes b_i en lugar de la incógnita y como denominador el determinante de los coeficientes **|A|**. Precisamente esto mismo se logra de una vez con la trasposición de la matriz adjunta $(adj\ A)^T$ dividida por **|A|**, que lleva a una matriz A^{-1} . Esa matriz inversa multiplicada por el vector **B** de términos independientes genera el vector **X** cuyas componentes son las soluciones.

Ejemplo: Resolver matricialmente el sistema:

$$\begin{cases} 2x-4y-2z+1=0 \\ -x-y =-1 \\ x+3y-z+5=0 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{Bmatrix}$$

y la del vector independiente:

$$B = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

El sistema queda planteado como **A.X=B** de donde $A^{-1}.B= X$, es decir:

$$\begin{Bmatrix} 0{,}1 & -1 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & -1 & -0{,}6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}9 \\ -0{,}9 \\ 4{,}2 \end{Bmatrix}$$

Entonces la solución es **x=1,9** ; **y=-0,9** ; **z=4,2**

Hoy en día, todas las planillas de cálculo electrónicas (Lotus 123, Quattro, Excel, etc.), manejan rápidamente matrices de gran cantidad de elementos y la solución de sistemas de ecuaciones requiere sólamente el trabajo de entrar los datos en las celdas y elegir el comando apropiado para invertir, multiplicar o hallar el determinante correspondiente.

Suma de matrices

Se define como suma de dos matrices a la que resulta de sumar elementos correspondientes. Las matrices a sumar deben coincidir en el número de filas y columnas, es decir deben presentar la misma forma.

Por ejemplo:

$$\begin{Bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 & 4 & 8 \\ -3 & -1 & 0 \end{Bmatrix}$$

Matrices simétricas y hemisimétricas

Son **simétricas** las matrices **cuadradas** que tienen sus elementos de manera que $a_{ij} = a_{ji}$, y **hemisimétricas** cuando $a_{ij} = -a_{ji}$, vale decir que los elementos de su diagonal principal son nulos ($a_{ii} = 0$)

Si la matriz **S** es simétrica resulta igual a su traspuesta, es decir $S = S^t$

Si la matriz **H** es hemisimétrica resulta igual a **menos** su traspuesta, es decir $H = -(H^t)$

De la suma de una matriz cualquiera con su traspuesta resulta una matriz simétrica diagonal, p.ej:

$$\begin{Bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{Bmatrix}$$

De la resta de una matriz cualquiera con su traspuesta resulta una matriz hemisimétrica, p.ej:

$$\begin{Bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{Bmatrix}$$

De los anterior surge una importante propiedad: cualquier matriz cuadrada **A** puede expresarse como suma de una matriz simétrica y otra hemisimétrica:

$$A = ½\,(A+A') + ½\,(A-A')$$

Tensores

Funciones lineales de la dirección

Algo más sobre vectores

Vimos que un **vector** es una magnitud apropiada para definir magnitudes compuestas por dos o más escalares. El ejemplo típico es la **posición** de un punto en el plano o en el espacio (terna de valores **x,y,z** , longitud, latitud y altura, etc.). El concepto de posición se extiende a cualquier número de dimensiones en un hiperespacio. Vimos también que una representación conveniente para vectores es la matricial, mediante una columna de números que son las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados.

Sin embargo no cualquier colección de escalares representa necesariamente una magnitud vectorial. Para que ellas sean las proyecciones de un vector deben cambiar de manera determinada con la variación de la orientación de la terna de ejes.

El cambio de componentes con una rotación de la terna de ejes ortogonales cumplen las ecuaciones de transformación lineal ya vistas en la página 10, por ejemplo:

$X_P = X_Q.\cos(i'\wedge i) + Y_Q.\cos(i'\wedge j) + Z_Q.\cos(i'\wedge k)$

$Y_P = X_Q.\cos(j'\wedge i) + Y_Q.\cos(j'\wedge j) + Z_Q.\cos(j'\wedge k)$

$Z_P = X_Q.\cos(k'\wedge i) + Y_Q.\cos(k'\wedge j) + Z_Q.\cos(k'\wedge k)$

Las anteriores relacionan el vector **OP** = ***P*** de componentes $X_P\ Y_P\ Z_P$ con **otro** vector **OQ = *Q*** del mismo módulo (|***P***|=|***Q***|) , de componentes $X_Q\ Y_Q\ Z_Q$,

El sistema anterior se expresa convenientemente en forma matricial **P = T. Q**, siendo **T** la matriz de los cosenos de ángulos entre los seis ejes. Se verifica que si los ejes son ortogonales es $T^T.T = 1$ para |***P***|=|***Q***|

Los elementos del vector transformado son entonces:

$$P_i = S_{j=1,2,3}\ t_{ij}\ Q_j$$

Aunque idénticas en su forma matemática, la transformación anterior representa también un concepto diferente, a saber: la expresión del **mismo** vector en dos sistemas de coordenadas diferentes:

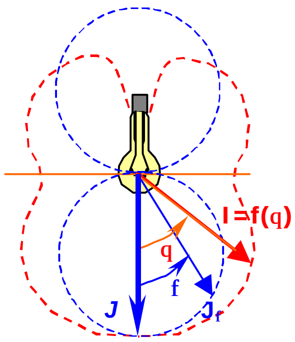
$$P'_i = S_{j=1,2,3}\ t_{ij}\ P_j$$

Si la matriz de transformación (supuesta de determinante no nulo) no fuera de cosenos entre ejes ortogonales, y en cambio de coeficientes a_{ij} cualesquiera, la operación **T.Q** no daría un vector del mismo módulo que ***P***, sino en general otro vector |***P***|≠|***Q***|

La proyección de un vector ***P*** , de componentes P_1, P_2,... sobre la dirección de otro vector ***U*** de componentes U_1, U_2,....., está dada por el producto escalar $\boldsymbol{P.U} / |\boldsymbol{U}| = S_i\ P_i.u_i$, donde los escalares P_i son las proyecciones de ***P*** y u_i los cosenos entre la dirección de ***U*** y los ejes de referencia ortogonales.

El valor de esta proyección se mantiene invariable con un cambio de coordenadas y sólamente varía en función de la dirección de ***U***, y lo hace en forma **lineal** (los cosenos aparecen elevados a la primera potencia), y **homogénea** (los cosenos aparecen en todos los términos) tal como se ve en la fórmula anterior.

Resulta así que puede definirse a un vector como "**una función escalar lineal y homogénea de la dirección en el espacio**". Por supuesto que ese espacio puede ser de dos, tres o más dimensiones.



Como se dijo ya, hay magnitudes que aunque varían con la dirección no son vectores. Por ejemplo la intensidad luminosa **I** de la lámpara de la figura es una función de la dirección, medida por el ángulo q. Sin embargo no puede representarse en forma vectorial porque varía según la curva simétrica punteada en rojo, que dista de ser una circunferencia (línea punteada azul), solo en cuyo caso estaría representada por el vector ***J***, con una proyección en la dirección f que vale J_f = **|J|.cos(f)**

Operadores diádicos, afinores y tensores

Estudiemos una transformación **T** que cambia la terna de versores **i,j,k** en otra **i', j', k'**, es decir **T.i =i' ; T.j=j' ; T.k =k'**

Se puede expresar un vector ***Q*** cuyas sus proyecciones sobre los ejes son $(Q.i)=Q_x$; $(Q.j)=Q_y$; $(Q.k)=Q_z$ como ***Q*** = **(*Q.i*) *i* + (*Q.j*) *j* + (*Q.k*) *k***

Aplicándole la transformación **T** anteriormente definida a ambos miembros de la anterior (teniendo en cuenta que las proyecciones Q_i son escalares y que **T** es lineal), queda: **T.*Q* = (*Q.i*)T*i* + (*Q.j*)T*j* + (*Q.k*)T*k* = (*Q.i*) *i* '+ (*Q.j*) *j* '+ (*Q.k*) *k* '**

La transformación lineal **T** puede entonces considerarse un operador de la forma **T = [*i i' + j j' + k k'*]** que aplicado a **Q** nos da **(*Q.i*) *i* '+ (*Q.j*) *j* '+ (*Q.k*) *k* '**

Para generalizar la transformación anterior cuando las dos ternas de versores **i,j,k i',j',k'** se reemplazan en las expresiones anteriores por sendas ternas ortogonales de vectores $u_1,u_2,u_3\ ;\ v_1,v_2,v_3$, es necesario expresar ***Q*** en función de la terna u_1,u_2,u_3 mediante la expresión:

$Q = (Q.u_1)u^I + (Q.u_2)u^{II} + (Q.u_3)u^{III}$

donde u_i y u^I son vectores recíprocos tal que se verifican las ecuaciones: $u_1\ u^I = 1$; $u_2\ u^{II} = 1$; $u_3\ u^{III} = 1$

Siendo $T\ u^I = v_1$; $T\ u^{II} = v_2$; $T\ u^{III} = v_3$, resulta

$T.Q = (Q.u_1)v_1 + (Q.u_2)v_2 + (Q.u_3)v_3 = P$

Considerando que **T** es un operador que afecta a **Q**

$T = [u_1\ v_1 + u_2\ v_2 + u_3\ v_3]$

Operadores de este tipo se llaman **diádicos**, porque están formados por pares de vectores o **díadas *i i', j j' , k k'***, $u_1\ v_1$, $u_2\ v_2$, $u_3\ v_3$

En este caso los vectores ***Q*** y su transformado ***P*** se llaman afines, es decir vinculados por la transformación **T**. Por tal motivo los operadores diádicos de transformación del tipo **T** se llaman también **afinores**.

Así como los **vectores** son operadores que representan traslaciones , rotaciones y en general movimientos de cuerpos, pero también por sí solos encarnan a magnitudes de dos o más escalares (fuerzas, corrientes, etc.), los **afinores** u **operadores diádicos** son entes que actúan sobre **vectores** pero también por sí solos expresan propiedades vectoriales de sistemas físicos, como los momentos de inercia de los cuerpos según el eje considerado o la deformación y estado de tensión en el interior de la materia sometida a esfuerzos. Por esta última e importante aplicación es que ingenieros y físicos designen como **tensor** al operador diádico o afinor.

Los **tensores**, **afinores** u **operadores diádicos** se representan igual que una transformación, por ejemplo por una matriz cuadrada. Hay una estrecha analogía entre vectores y tensores, siendo éstos en cierto modo una generalización de los primeros. Así como los elementos de una matriz columna representan las componentes escalares de un vector, las columnas de la matriz cuadrada se pueden considerar componentes vectoriales de un tensor.

Empero, no cualquier matriz cuadrada representa a un tensor. Se demuestra que con un cambio de coordenadas de matriz de cosenos **A**, un tensor **T** se transforma en otro **T'** igual a la matriz de la transformación aplicada al tensor original y el resultado multiplicado por la matriz traspuesta de la transformación $\mathbf{A}^T$, vale decir que $\mathbf{T'} = \mathbf{A.T.A}^T$

Sean en efecto dos vectores ***u*** y ***v*** que por ser vectores se transforman con matriz de cosenos **A** según ***u***'=**A*u*** , ***v***'=**A*v*** o sea, puestas en forma desarrollada:

$$\mathbf{u'_i = S_{j=1,2,3}\, a_{ij}\, u_j}$$
$$\mathbf{v'_i = S_{j=1,2,3}\, a_{ij}\, v_j}$$

Consideremos ahora la expresión ya vista del tensor $\mathbf{T} = [u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3]$, de matriz $\{t_{ij}\}$, la que desarrollada resulta:

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{Bmatrix}$$

y el mismo transformado por la rotación de ejes ortogonales **A**:

$$\mathbf{T'} = \begin{Bmatrix} u'_1 v'_1 & u'_1 v'_2 & u'_1 v'_3 \\ u'_2 v'_1 & u'_2 v'_2 & u'_2 v'_3 \\ u'_3 v'_1 & u'_3 v'_2 & u'_3 v'_3 \end{Bmatrix}$$

donde $t'_{ij} = u'_i\, v'_j = S_h\, a_{ih}\, u_h\ \ S_k\, a_{jk}\, v_k =$

$= S_{h,k}\, a_{ih}\, a_{jk}\, u_h\, v_k = S_{h,k}\, a_{ih}\, a_{jk}\, t_{hk}$

siendo $\{t'_{ij}\} = \{a_{ij}\}\, \{t_{ij}\}\, \{a_{ji}\}$

Producto de un tensor por un vector – Otra definición de tensor

Consideremos la transformación $\{t_{ij}\}$ aplicada al vector objeto $\{x\}$, que da un vector trasformado $\{y\}$ de manera que ***y*** **=T *x***

Si **T** es un tensor, se puede considerar al vector resultado ***y*** de dicha transformación como el producto del tensor **T** , de componentes vectoriales t_1 , t_2, t_3 por el vector ***x*** , de componentes escalares x_1, x_2, x_3. De acuerdo a lo visto esto es ***y*** **=T *x*** con:

$$y_1 = t_{11}\ x_1 + t_{12}\ x_2 + t_{13}\ x_3$$

$$y_2 = t_{21}\ x_1 + t_{22}\ x_2 + t_{23}\ x_3$$

$$y_1 = t_{31}\ x_1 + t_{32}\ x_2 + t_{33}\ x_3$$

es decir que se puede poner:

$$y = T\,x = t_1\ x_1 + t_2\ x_2 + t_3\ x_3$$

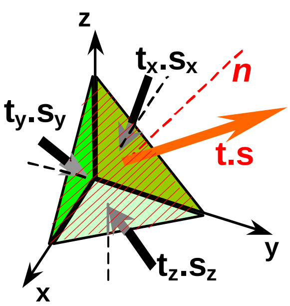
Si ***x*** =***u*** (vector unitario) de dirección determinada, sus componentes u_1 , u_2 , u_3 son los cosenos de los ángulos que forma la dirección con los ejes de coordenadas ortogonales y entonces el producto **T*u*** es la componente del tensor **T** en la dirección del vector unitario: $\mathbf{T}\,u = \mathbf{T}_u = t_1\, u_1 + t_2\ u_2 + t_3\ u_3 = S_i\, t_i\, u_i$

resultando que la transformación **T** es una función vectorial lineal y homogénea de la dirección, independiente de la terna de ejes de referencia.

Se llega así a una nueva definición de tensor, o afinor, o transformación diádica, semejante a la de un vector:

Tensor es una función vectorial que hace corresponder a cada dirección en el espacio de n dimensiones un vector también n-dimensional, según una expresión lineal y homogénea de los cosenos de dicha dirección.

Tensor de tensiones



El ejemplo típico que ilustra esta definición es el tensor de tensiones.

Los cuerpos sólidos en equilibrio sometidos a esfuerzos desarrollan en su interior fuerzas que equilibran las acciones externas aplicadas. Así, en cada punto del interior del cuerpo solicitado por fuerzas exteriores existe una tensión o cociente entre fuerza y superficie que varía con la dirección. Ese cociente está representado por un vector cuya dirección no tiene por qué coincidir con la normal a la superficie elegida. Tomando un punto y haciendo variar la dirección elegida, se obtiene para cada una de ellas una tensión. El conjunto de todas las tensiones se expresa por el tensor de tensiones.

Tomemos en el interior del cuerpo un tetraedro elemental, definido por los tres ejes coordenados y un plano cualquiera que los corte. Es necesario que en el equilibrio las fuerzas que actúen sobre cada cara den resultante nula. Sean t_x, t_y, t_z las tensiones sobre cada cara, de superficies s_x, s_y y s_z , y ***t*** y **s** la tensión y superficie de la cara principal. Debe verificarse para que haya equilibrio que:

$\mathbf{t.s = t_x\, s_x + t_y\, s_y + t_z\, s_z}$, o bien

$\mathbf{t_n = \mathit{t}_x\, (s_x/s) + \mathit{t}_y\, (s_y/s) + \mathit{t}_z\, (s_z/s)}$

Los cocientes entre paréntesis entre superficies de las caras $\mathbf{s_x}$, $\mathbf{s_y}$ y $\mathbf{s_z}$ y cara principal **s** valen igual que los cosenos de la normal ***n*** con los ejes, (demuéstrese) de manera que la expresión anterior coincide con la definición dada de componente de un tensor **T** en la dirección ***n***

Razones de equilibrio de momentos imponen que el tensor $\mathbf{T = \{t_{ij}\}}$, que representa el estado de esfuerzos internos, esté representado por una matriz simétrica ($\mathbf{t_{ij}=t_{ji}}$). Los elementos de la diagonal principal $\mathbf{t_{xx}}$ **,** $\mathbf{t_{yy}}$**,** $\mathbf{t_{zz}}$, se llaman tensiones normales y son de la dirección de los ejes. Corresponden a esfuerzos de compresión o tracción. Los elementos restantes $\mathbf{t_{ij} = t_{ji}}$ (con $i \neq j$) son las tensiones tangenciales o de corte, que tienden a desgarrar el material según el plano considerado. Así, sobre el plano **xy** actúan perpendicularmente la tensión $\mathbf{t_{zz}}$, en dirección al eje **x** la tensión de corte $\mathbf{t_{zx}}$ y la tensión de corte $\mathbf{t_{zy}}$ en dirección al eje y . Los ingenieros designan a las tensiones de tracción o compresión con la letra sigma (s) y a las tensiones de corte con la letra tau (t)

El tensor de tensiones responde a la matriz:

$$\mathbf{T}_s = \left\{ \begin{matrix} s_x & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & s_y & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & s_z \end{matrix} \right\}$$

-o-o-o-o-